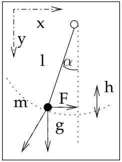
Setrvačníky v $\mathbb{R}^4$

Pavel Hájek

MFF UK

8. září 2010

Geometrická mechanika



Stupně volnosti

$Q = S^1$, $\alpha \in Q$

Kin. energie $T(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$

Pot. energie $V(t) = mgy(t)$

Hamilton

$H = T + V$, (T^*Q, ω)

$(\alpha, p_\alpha) \in T^*Q$

$\mathrm{i}_{\mathbf{X}_H}\omega = \mathrm{d}H$

$\ddot{\alpha} + K\sin(\alpha) = 0$, $K = \frac{g}{l}$

zachování E=T+V

$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}$

$\mathbb{F}L$

$\mathbb{F}H$

Newton

$F = ma, a(t) = \dot{v}(t), v(t) = \dot{x}(t)$

$x(t) = l\sin(\alpha(t))$

$y(t) = l(1 - \cos(\alpha(t)))$

Princip kritické akce (nejmensi)

Lagrange

$L = T - V$ $(\alpha, \dot{\alpha}) \in TQ$

$\delta \int L = 0 \implies$ E-L rovnice

Hamiltonovská mechanika

Hamiltonovský systém

Trojice (M, ω, H), kde

- (M, ω) je **symplektická varieta**, tj.
  M je hladká varieta a ω je nedegenerovaná uzavřená vnější diferenciální 2-forma
- H je hladká funkce zvaná **Hamiltonián**

Příklady symplektických variet

- T^*Q, $\dim(Q) = n$ s $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$ v kanonických souřadnicích (q^i, p_i) ($\omega = -\mathrm{d}\theta$, $\theta = \sum_{i=1}^n p_i \mathrm{d}q^i$ Liouvilleova 1-forma)
- S^2 s $\omega = \sin^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ ve sférických souřadnicích (α, β). Není symplektickým kotečným bandlem žádné variety (ω není exaktní)

Příklady symplektických variet

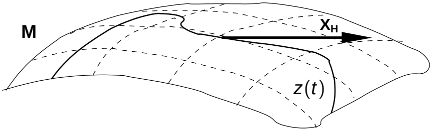
- T^*Q, $\dim(Q) = n$ s $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$ v kanonických souřadnicích (q^i, p_i) ($\omega = -\mathrm{d}\theta$, $\theta = \sum_{i=1}^n p_i \mathrm{d}q^i$ Liouvilleova 1-forma)
- S^2 s $\omega = \sin^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ ve sférických souřadnicích (α, β). Není symplektickým kotečným bandlem žádné variety (ω není exaktní)

Hamiltonovy rovnice

Hamiltonovské vektorové pole a Hamiltonovy rovnice

(M, ω, H) Hamiltonovský systém. Pak

- **Hamiltonovské vektorové pole** … $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ splňující $\mathrm{i}_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$, kde $\mathrm{i}_{X_H}\omega = \omega(X_H, -) \in \mathcal{E}^1(M)$.
- **Hamiltonovy kanonické rovnice** … rovnice pro integrální křivku $z(t) \in M$, $t \in \mathbb{R}$ pole X_H, tj. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) = X_H(z(t))$.



„Klasicky“ (lokálně): $M = T^*Q, z(t) = (q^i(t), p_i(t))$

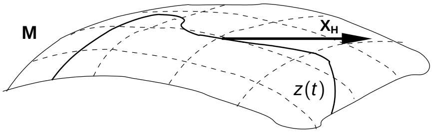
$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Hamiltonovy rovnice

Hamiltonovské vektorové pole a Hamiltonovy rovnice

(M, ω, H) Hamiltonovský systém. Pak

- **Hamiltonovské vektorové pole** … $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ splňující $\mathrm{i}_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$, kde $\mathrm{i}_{X_H}\omega = \omega(X_H, -) \in \mathcal{E}^1(M)$.
- **Hamiltonovy kanonické rovnice** … rovnice pro integrální křivku $z(t) \in M$, $t \in \mathbb{R}$ pole X_H, tj. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) = X_H(z(t))$.



„Klasicky" (lokálně): $M = T^*Q, z(t) = (q^i(t), p_i(t))$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Poissonovy závorky a integrály pohybu

Poissonovy závorky

Zobrazení $\{-,-\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definované jako

$$\{F,G\} = \omega(X_F, X_G) \quad , F, G \in C^\infty(M)$$

- $\{-,-\}$ jsou antisymetrické
- $X \in \mathfrak{X}(M)$ Hamiltonovské $\Leftrightarrow X[f] = \{f,H\}$, $f \in C^\infty(M)$ (Poissonovy variety $(M, \{-,-\})$)
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ z) = \{f,H\} \circ z$ pro každou $f \in C^\infty(M)$.

Integrál pohybu

$f \in C^\infty(M)$ je integrálem pohybu (M, ω, H), resp. zachovávající se veličinou, jestliže $\{f,H\} = 0$.

- Integrálem pohybu je vždy „energie" H $(= T + V)$, tj. $\{H,H\} = 0$

Poissonovy závorky a integrály pohybu

Poissonovy závorky

Zobrazení $\{-,-\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definované jako
$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G) \;\; , F,\, G \in C^\infty(M)$$

- $\{-,-\}$ jsou antisymetrické
- $X \in \mathfrak{X}(M)$ Hamiltonovské $\Leftrightarrow X[f] = \{f, H\}$, $f \in C^\infty(M)$ (Poissonovy variety $(M, \{-,-\})$)
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ z) = \{f, H\} \circ z$ pro každou $f \in C^\infty(M)$.

Integrál pohybu

$f \in C^\infty(M)$ je integrálem pohybu (M, ω, H), resp. zachovávající se veličinou, jestliže $\{f, H\} = 0$.

- Integrálem pohybu je vždy „energie" H $(= T + V)$, tj. $\{H, H\} = 0$

Poissonovy závorky a integrály pohybu

Poissonovy závorky

Zobrazení $\{-,-\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definované jako
$$\{F,G\} = \omega(X_F, X_G) \quad , F,\, G \in C^\infty(M)$$

- $\{-,-\}$ jsou antisymetrické
- $X \in \mathfrak{X}(M)$ Hamiltonovské $\Leftrightarrow X[f] = \{f,H\}$, $f \in C^\infty(M)$ (Poissonovy variety $(M, \{-,-\})$)
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ z) = \{f,H\} \circ z$ pro každou $f \in C^\infty(M)$.

Integrál pohybu

$f \in C^\infty(M)$ je integrálem pohybu (M,ω,H), resp. zachovávající se veličinou, jestliže $\{f,H\} = 0$.

- Integrálem pohybu je vždy „energie“ H $(= T + V)$, tj. $\{H,H\} = 0$

Integrabilní systém

(M, ω, H), $\dim(M) = 2n$ je **úplně integrabilní** $\Leftrightarrow$ existuje n integrálů pohybu $K_i \in C^\infty(M)$ v involuci, tj. $\{K_i, K_j\} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ a diferenciály $\mathrm{d}f_i$, $i = 1, \ldots, n$ jsou lineárně nezávislé.

Liouville-Arnoldova věta

(M, ω, H) úplně integrabilní Hamiltonovský systém na kompaktní varietě M. Označme $\{K_1, \dots, K_n\}$ integrály pohybu a $E : m \in M \mapsto (K_1(m), \dots, K_n(m)) \in \mathbb{R}^n$. Jestliže je $c \in \mathbb{R}^n$ regulární hodnotou E a $E^{-1}(c)$ je souvislé, pak

$$M_c = E^{-1}(c) \simeq_{\text{difeo}} \mathbb{T}^n$$

Heslo: „Pohyby se dějí na toru“

$T^2 = S^1 \times S^1$

- „**Action-angle variables**“: Lokální souřadnice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, K_1, \dots, K_n)$ na T^*Q ((α_i) na $M_c \simeq \mathbb{T}^n$), že $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}\alpha_i \wedge \mathrm{d}K_i$ a $H = H(K_i)$, tj.

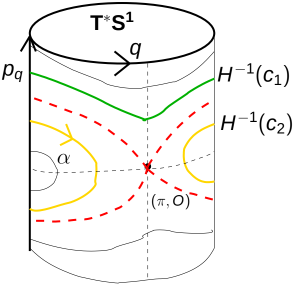
$$\dot{K}_i = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = 0 \ , \quad \dot{\alpha}_i = \frac{\partial H}{\partial K_i} = F_i(K_j)$$

- Původní řešení $z(t) = (q^i(t), p_i(t))$ v **kvadraturách**

Příklad (kyvadlo):

$H = \frac{p_q^2}{2m} + mgl(1 - \cos(q))$

$E(q, p_q) = H(q, p_q)$, $E^{-1}(c_i) \simeq S^1$



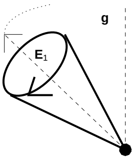
Setrvačníky

n-rozměrné setrvačníky

Hamiltonovské systémy na $(T^*SO(n), \omega)$ s:
Volný… $H(R, P_R) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(P_R Q P_R^T)$.
Těžký… $H(R, P_R) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(P_R Q P_R^T) + R\mathbf{X}_T \cdot \mathbf{g}$.

- $R \in SO(n)$, $P_R \in T_R^*SO(n)$
  $M = (L_R)_E^*(P_R) \in \mathfrak{so}^*(n)$ moment hybnosti v tělese
- Q positivně definitní matice „momentu setrvačnosti“ (rozložení hmoty)
- $\mathbf{X}_T \in \mathbb{R}^n$ „těžiště“, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ tíhový vektor
- transformace souřadnic $\mathbf{x} = R\mathbf{X}$

3D Lagrangeův setrvačník



$$Q = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, A, B > 0$$

$$\mathbf{X}_T = (X, 0, 0)$$

- $H(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot Q\mathbf{M} + R\mathbf{X}_T \cdot \mathbf{g}$
- $\mathbf{M} \in (\mathbb{R}^3)^* \simeq \mathfrak{so}^*(3)$, kde $\cdot$ je standardní skal. součin na $\mathbb{R}^3$
- Integrály pohybu: H, $\mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_T$ ($SO(2)$ symetrie vůči otočení kolem $\mathbf{X}_T$), $R\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}$ ($SO(2)$ symetrie vůči otočení kolem $\mathbf{g}$ v prostoru), tj. 3 funkce
- $\dim(T^*SO(3)) = 6$, tedy úplně integrabilní systém, se sadou I.P. výše

4D Lagrangeův setrvačník

- $SO(2) \times SO(2)$ symetrický setrvačník, tj.
$$Q = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \; A, B > 0, \; \mathbf{X}_T = (X, X, 0, 0)$$
- $H(R, P_R) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(P_R Q P_R^T) + R\mathbf{X}_T \cdot \mathbf{g}$, $P_R \in T_R^* SO(4)$
- Integrály pohybu: H, 3 složky RMR^T ($SO(3)$ symetrie kolem $\mathbf{g}$, analogie $R\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}$), jedna složka M ($SO(2)$ symetrie kolem $\mathbf{X}_T$), tj. zatím 5 funkcí
- $\dim(T^* SO(4)) = 12$, tj. k integrabilitě zbývá 1 a ověření předpokladů

Poděkování

Děkuji za pozornost.