Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavel Hájek

Setrvačníky v $\mathbb{R}^4$

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2010

Děkuji RNDr. Svatopluku Krýslovi, Ph.D., za cenné rady a odbornou pomoc během psaní mé práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 5.8.2010 Pavel Hájek

Obsah

Název práce: Setrvačníky v $\mathbb{R}^4$
Autor: Pavel Hájek
Katedra (ústav): Matematický ústav UK
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
e-mail vedoucího: krysl@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme symetrie a integrály pohybu Hamiltonovských systémů na symplektických varietách. Jsou zde uvedeny základy symplektické geometrie a vybudován aparát pro zkoumání zachovávajících se veličin při symetriích systémů vůči akcím Lieových grup. Z pokročilých témat zmíníme pojem integrability Hamiltonovských systémů a představíme principy symplektické redukce. Výše uvedené přístupy aplikujeme na problém vícerozměrných setrvačníků. Budeme zkoumat jejich integrály pohybu a uvedeme též zobecněné vícerozměrné Eulerovy pohybové rovnice.

Klíčová slova: Hamiltonovská mechanika, symplektická geometrie, rotace, setrvačníky, symetrie

Title: Spinning tops in $\mathbb{R}^4$
Author: Pavel Hájek
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: krysl@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This paper features a study of the symmetries and constants of motion of the Hamiltonian systems on symplectic manifolds. The theoretical foundations of symplectic geometry are to be presented as well as an instrument for the examination of conserved quantities comming up from the symmetries to the Lie group actions. Further advanced topics, such as the concept of integrability of the Hamiltonian systems and some principles of the symplectic reduction, will be presented. The principles listed above will be applied upon the problem of multi-dimmensional spinning tops. Some of their symmetries and related integrals of motion will be considered. We will also note the generalised multi-dimmensional Euler‘s equations of motion.

Keywords: Hamiltonian mechanics, symplectic geometry, rotations, spinning tops, symmetry

1. Úvod

Geometrická Hamiltonovská mechanika je důležitým pojítkem mezi fyzikálními principy a abstraktní matematikou. Uplatňují se v ní poznatky z mnoha matematických disciplín. Struktury vzniknuvší původně k účelům popisu a řešení čistě fyzikálních problémů se stávají středem zájmu široké matematické komunity, neboť poskytují stále prostor k novým objevům. Kombinují se zde výsledky diferenciální geometrie, topologie, teorie Lieových grup a algeber, algebraické geometrie, teorie integrabilních systémů, a jiných pokročilých oborů.

Při studiu Hamiltonovských systémů hrají důležitou roli symetrie. Známe-li nějaké symetrie výhodných vlastností, můžeme z nich přímo usuzovat na zachovávající veličiny. Z počtu zachovávajících se veličin a jejich algebraických vztahů pak můžeme rozhodovat o integrabilitě systému. Symetrie vůči akcím Lieových grup mají výhodné vlastnosti jak z teoretického, tak z výpočetního hlediska, což však nahlédneme v následujícím textu. Kromě hledání integrálů pohybu je možno symetrie využít i trochu odlišným způsobem, totiž k redukci počtu stupňů volnosti systému. Tento přístup formalizuje teorie redukce, jejichž principů se v textu též letmo dotkneme.

Třírozměrné setrvačníky jsou již důkladně prozkoumané a tak není divu, že se v poslední době stávají středem zájmu ty vícerozměrné. Jsou zkoumány především z hlediska úplné integrability. Známými příklady integrabilních setrvačníků jsou symetrické Lagrangeovy setrvačníky, a to jak ve třech, tak ve čtyřech rozměrech. Integrabilní je i libovolný vícerozměrný volný setrvačník. Nemalou část textu věnujeme právě zkoumání symetrií a integrálů pohybu vícerozměrných setrvačníků.

2. Rotace a grupa SO(n)

V této úvodní kapitole definujeme pojem rotace, který pro nás v dalším textu hraje podstatnou roli. Vyslovíme a dokážeme vícerozměrnou verzi Eulerovy věty pro vlastní vektory rotačních matic a uvedeme některé vzorce platné pro rotace ve třech rozměrech. Zmíníme se také o parametrizaci $SO(n)$ Eulerovými úhly. Na závěr se letmo zamyslíme nad typy rotací v prostoru $\mathbb{R}^4$.

Definice 2.0.1. *Rotací* rozumíme lineární zobrazení $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, které zachovává skalární součin a orientaci. To znamená, že

$$R\mathbf{x} \cdot R\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \ \ , \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \tag{2.0.1}$$

a

$$\operatorname{sgn}(\omega(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n})) = \operatorname{sgn}(\omega(R\mathbf{v_1}, R\mathbf{v_2}, \dots, R\mathbf{v_n})) \ , \ \mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n} \in \mathbb{R}^n$$

pro zvolenou orientaci $\omega \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$, $\omega \neq 0$.

Poznámka 2.0.2. V textu budeme ztotožňovat lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s jeho matici $L \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \times n$ reálné matice) vzhledem k nějaké ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Někdy se rotacím z definice (2.0.1) říká *vlastní rotace*, a to kvůli vlastnosti zachování orientace. Zobrazením, která pouze zachovávají skalární součin, resp. transformují ortonormální báze na ortonormální báze a přitom mění orientaci se ríká *rotace nevlastní.* Příkladem nevlastní rotace může být třeba inverze kolem nějaké ze souřadnicových os. Vlastní a nevlastní rotace dohromady tvoří *ortogonální grupu* $O(n)$ všech zobrazení zachovávajících skalární součin.

Tvrzení 2.0.3. Všechny rotace $\mathbb{R}^n$ tvoří vzhledem ke skládání grupu, tzv. *speciální ortogonální grupu* $SO(n)$. V maticové reprezentaci je

$$SO(n) = \{\ R \in M_n(\mathbb{R}),\ R^T R = E,\ \det(R) = 1\}. \tag{2.0.2}$$

Důkaz : Grupová struktura je ihned patrná. Pro R, $S \in SO(n)$ je

$$(SR)^T(SR) = R^T S^T SR = R^T R = E$$

a $\det(SR) = \det(S)\det(R) = 1$. Matice R^T je inverzním prvkem k R a jednotková matice E je jednotkou v $SO(n)$. Ekvivalenci podmínek (2.0.2) a definice (2.0.1) nahlédneme následovně. Pro všechna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je

$$R\mathbf{x} \cdot R\mathbf{y} = \sum_{k,l,m=1}^{n} R_{kl} R_{km} x^l y^m \ .$$

Speciálně volbou $\mathbf{x} = \mathbf{e}_l$ a $\mathbf{y} = \mathbf{e}_m$ pro vektory ortonormální báze $\{\mathbf{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ odtud plynou relace ortogonality

$$\sum_{k=1}^{n} (R^T)_{lk} R_{km} = \delta_{lm}. \tag{2.0.3}$$

Je zřejmé, že R zachovává skalární součin, právě tehdy když splňuje relace ortogonality, respektive právě tehdy když $R^T R = E$. Známá identita z multilineární algebry dále dává

$$\omega(R\mathbf{e_1}, R\mathbf{e_2} \ldots R\mathbf{e_n}) = det(R)\omega(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}).$$

K zachování orientace tedy postačuje $det(R) > 0$ a naopak. Pro ortogonální matici $O \in O(n)$ splňující $O^T O = E$ je

$$\det(O^T O) = (\det(O))^2 = 1$$

a $\det(O) = \pm 1$. Za podmínky ortogonality je tedy $\det(O) > 0$ právě když $O \in SO(n)$. $\square$

Grupu $SO(n)$ lze parametrizovat $\frac{1}{2}n(n-1)$ *Eulerovými úhly*, tj. reálnými parametry z intervalů $[0, \pi]$, $[0, 2\pi]$. Důkaz této vlastnosti je velmi technický a nepřehledný. Využívá se přitom tranzitivity působení $SO(n)$ na sféře S^{n-1} a matematické indukce. Eulerovy úhly lze použít ke konstrukci atlasu na $SO(n)$ a přímo ukázat, že $SO(n)$ je *Lieovou grupou.* Eulerovy úhly jsou z výpočetního hlediska nevhodné pro parametrizaci $SO(n)$ ve více než třech rozměrech. Nebudeme se jimi tedy dále v textu zabývat.

Věta 2.0.4.(Eulerova rotační) Pro $n = 2k + 1$, $k \geq 1$ a $R \in SO(n)$ existuje vektor $0 \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ takový, že

$$R\mathbf{v} = \mathbf{v}. \tag{2.0.4}$$

Jestliže $n = 2k$, $k \geq 1$, pak existuje rotační matice $R \in SO(n)$ taková, že

$$R\mathbf{v} \neq \mathbf{v}$$

pro všechna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz : Předně si uvědomme, že požadavek (2.0.4) je ekvivalentní tomu, že $\mathbf{v}$ je vlastním vektorem R příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 1$. K důkazu věty nám tedy stačí ukázat, že v liché dimenzi má každá rotační matice $R \in SO(n)$ vlastní číslo $\lambda = 1$, a že v sudé dimenzi vždy existuje rotační matice, která 1 jako své vlastní číslo nemá. Ukažme nejprve, že pro libovolné $n \geq 2$ leží všechna vlastní čísla $R \in SO(n)$ na jednotkové kružnici v $\mathbb{C}$. Komplexnímu vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ přísluší nějaký nenulový komplexní vlastní vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, že $R\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$. Ten lze zapsat jako $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{w}$ pro nějaké $\mathbf{u}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Na $\mathbb{C}^n$ definujme normu předpisem

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} z^j \bar{z}^j},$$

kde složky z^j mají tvar $z^j = u^j + \mathrm{i}w^j$ s u^j, $w^j \in \mathbb{R}$ pro $j = 1, \ldots, n$. Snadno se ověří, že $\| - \|_{\mathbb{C}}$ je skutečně normou na $\mathbb{C}^n$. Necháme-li rotaci R působit na $\mathbf{z}$ podle vztahu

$$R\mathbf{z} = R\mathbf{u} + \mathrm{i}R\mathbf{w}$$

dostáváme, že

$$\begin{aligned} \|R\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{C}} = & \textstyle\sum_{j=1}^{n}(R\mathbf{u} + iR\mathbf{w})^j(R\mathbf{u} - iR\mathbf{v})^j = \sum_{j=1}^{n}(u^j)^2 + (w^j)^2 = \\ = & \textstyle\sum_{j=1}^{n} z^j \bar{z}^j = \|\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \tag{2.0.5}$$

Rotace R uvažovaná na $\mathbb{C}^n$ tedy normu $\| - \|_{\mathbb{C}}$ zachovává. Pro nenulový vlastní vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ je pak

$$\begin{aligned} \|R\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{C}} = & \ |\lambda|^2 \|\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{C}} \\ \|R\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{C}} = & \ \|\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

kde první rovnost plyne z $R\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ a druhá z (2.0.5). Je tedy nutně $|\lambda| = 1$, nebo-li $\lambda = e^{\mathrm{i}\alpha}$ pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále víme, že pokud je λ vlastním číslem R, je jím i jeho komplexní sdružení $\bar{\lambda}$. Vlastní čísla s nenulovou imaginární částí se tedy vyskytují v párech. Víme, že $\det(R) = 1$, a že determinant R je součinem všech vlastních čísel matice R i s jejich násobnostmi. Protože $\lambda\bar{\lambda} = 1$ dostáváme z předchozího, že -1 buďto není vlastním číslem, a nebo je rovnou vlastním číslem se sudou násobností. Pro n liché odtud plyne, že alespoň jedno vlastní číslo je nutně rovno jedné. Tvrzení pro lichou dimenzi jsme tímto dokázali. V sudé dimenzi snadno zkonstruujeme protipříklad, tj. rotační matici, která nemá 1 jako své vlastní číslo. Pro $n = 2$ je situace zřejmá z geometrické představy. Dokonce platí, že neexistuje netriviální rotace fixující nějaký nenulový směr. Obecná 2D rotace má známý tvar

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 2\pi).$$

Její charakteristický polynom je $f(\lambda) = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + 1$ s kořeny $\lambda_\pm = e^{\pm i\alpha}$. Proto je 1 vlastním číslem, tehdy a jen tehdy, když $\alpha = 0$. V tom případě je ovšem rotace identitou. Pro $n = 4$ také snadno zkonstruujeme protipříklad. Uvažme rotační matici

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \in SO(4),\ \alpha,\ \beta \in [0, 2\pi)$$

Charakteristický polynom je $f(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + 1)(\lambda^2 - 2\lambda\cos(\beta) + 1)$ s kořeny $\lambda \in \{e^{\pm i\alpha}, e^{\pm i\beta}\}$. Jednička je vlastním číslem, jen když $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$. Pokud $\alpha \neq 0$ a $\beta \neq 0$ dostáváme požadované. Analogicky postupujeme pro vyšší sudé dimenze. $\square$

Poznámka 2.0.5. Předchozí věta speciálně ve třech rozměrech tvrdí, že každá rotace $R \in SO(3)$ je určena jednotkovou *osou rotace* $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ a *úhlem rotace* $\omega \in [0, 2\pi)$. Osa $\mathbf{n}$ se při R zachovává a ω je úhel otočení roviny $\langle\mathbf{n}\rangle^\perp$ kolmé na $\mathbf{n}$ kolem $\mathbf{n}$. Na $\langle\mathbf{n}\rangle^\perp$ se totiž R chová jako 2D rotace, neboť z vlastnosti zachování skalárního součinu máme $R\langle\mathbf{n}\rangle^\perp = \langle\mathbf{n}\rangle^\perp$. Vzhledem ke kladně orientované ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$ jejímž jedním prvkem je $\mathbf{n}$, má pak R matici

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ 0 & \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}.$$

Následuje bezsouřadnicový vzorec spojující rotaci $R \in SO(3)$ s její osou rotace a rotačním úhlem. Za ním uvádíme ještě vzorec inverzní, který nám umožňuje jednoduše vypočítat úhel a osu rotace přímo z rotační matice.

Tvrzení 2.0.6.(Euler-Rodriguezova formule) Nechť je zadán jednotkový vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ a úhel $\omega \in [0, 2\pi)$. Příslušnou rotaci $R(\mathbf{n}, \omega)$ kolem osy $\mathbf{n}$ o úhel ω lze psát jako

$$R(\mathbf{n}, \omega) = cos(\omega)I + (1 - cos(\omega))\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin(\omega)\hat{\mathbf{n}}, \tag{2.0.6}$$

kde $\hat{\mathbf{n}}$ chápeme jako zobrazení $\hat{\mathbf{n}} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Důkaz : Zvolme nějaký nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, který chceme rotovat. Uvažme jeho projekci $E(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ do roviny kolmé na $\mathbf{n}$. Zvolme vektor $\mathbf{z} = \mathbf{n} \times E(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ kolmý jak na $\mathbf{n}$, tak na $E(\mathbf{v})$. Vektory $\mathbf{z}$ a $E(\mathbf{v})$ mají zřejmě stejnou délku, neboť $\mathbf{n}$ je jednotkový a $E(\mathbf{v})$ je na něj kolmé. Rotaci R vektoru $E(\mathbf{v})$ o úhel ω v rovině kolmé na $\mathbf{n}$ můžeme pak zapsat jako

$$RE(\mathbf{v}) = \cos(\omega)E(\mathbf{v}) + \sin(\omega)\mathbf{z}$$

Vzhledem k tomu, že $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ se při R zachovává, máme

$$\begin{aligned} R\mathbf{v} = \quad & RE(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = cos(\omega)(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + sin(\omega)(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + \\ & +(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = cos(\omega)\mathbf{v} + (1 - cos(\omega))(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + sin(\omega)(\mathbf{n} \times \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Při použití zobrazení $\hat{}$ můžeme pro R psát

$$R = cos(\omega)E + (1 - cos(\omega))\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + sin(\omega)\hat{\mathbf{n}},$$

což dokazuje požadované. $\square$

Tvrzení 2.0.7. Nechť je dána netriviální rotační matice $R \in SO(3)$. Potom pro osu rotace $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ a úhel rotace $\omega \in [0, 2\pi)$ platí

$$\cos(\omega) = \frac{tr(R) - 1}{2} \quad , \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2\sin(\omega)}(R - R^T).$$

Důkaz : Z tvrzení (2.0.4) víme, že $\mathbf{n}$ a ω určitě existují, a tedy $R = R(\mathbf{n}, \omega)$. Využijeme toho, že ve formuli (2.0.6) vystupují jen symetrické nebo antisymetrické matice. Počítáme-li stopu R, máme odtud totiž snadno

$$tr(R(\mathbf{n}, \omega)) = 3cos(\omega) + 1 - cos(\omega) + 0sin(\omega),$$

což je první vzorec. Dále

$$R(\mathbf{n}, \omega) - R^T(\mathbf{n}, \omega) = 2sin(\omega)\hat{\mathbf{n}},$$

což je druhý vzorec. $\square$

Poznámka 2.0.8. S ohledem na důkaz věty (2.0.4) mohou být vlastní čísla rotace $R \in SO(4)$ následujících typů. Čistě reálné spektrum

$$\{1,1,1,1\},\ \{-1,-1,-1,-1\},\ \{1,1,-1,-1\},$$

přísluší po řadě identitě, inverzi a inverzi dvou os. Zbývající typy vlastních čísel jsou

$$\{1,1,e^{i\alpha},e^{-i\alpha}\},\ \{-1,-1,e^{i\alpha},e^{-i\alpha}\},\ \{e^{i\beta},e^{-i\beta},e^{i\alpha},e^{-i\alpha}\}$$

pro α, $\beta \in (0,\pi)$. Místo zachování nějaké osy rotace, podobně jako v $\mathbb{R}^3$, máme v $\mathbb{R}^4$ vždy zachování alespoň dvou na sebe kolmých 2D podprostorů W, $W^\perp \subset \mathbb{R}^4$, a to ve smyslu $RW = W$, $RW^\perp = RW^\perp$ pro každé $R \in SO(4)$ (již jsme zmínili, že pokud $RW = W$ pak je z vlastnosti zachování skalárního součinu i $RW^\perp = W^\perp$). Rozeberme po řadě různé typy rotací podle množin vlastních čísel výše. Je-li spektrum čistě reálné můžeme pracovat s bazí vlastních vektorů. Protože se -1 i 1 vyskytují v párech, je existence invariantního W zřejmá. Na W či $W^\perp$ přitom R působí buďto jako identita, nebo jako středová inverze kolem počátku. Zbývá případ, kdy jsou vlastními čísly nějaká komplexní čísla λ, $\bar{\lambda}$ s nenulovou imaginární částí, tj. $\lambda = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$ a $\bar{\lambda} = \cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)$, $\alpha \in (0,\pi)$. K nim přísluší sdružené komplexní vlastní vektory $\mathbf{z} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ a $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ pro nějaká lineárně nezávislá $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$. Platí pak

$$\begin{aligned} R(\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}) = 2R\mathbf{u} = {} & 2(\cos(\alpha)\mathbf{u} - \sin(\alpha)\mathbf{v}) \\ R(i(\bar{\mathbf{z}}-\mathbf{z})) = 2R\mathbf{v} = {} & 2(\cos(\alpha)\mathbf{v} + \sin(\alpha)\mathbf{u}), \end{aligned}$$

a proto se rotací zachovává podprostor $W = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Vzhledem k bázi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ prostoru W lze působení R popsat jako

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

což je matice rotace v rovině. Ovšem $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ nejsou v obecném případu kolmé a stejně dlouhé zároveň. Interpretovat R jako rotaci W by tedy nebylo korektní. Také upozorněme, že výše jsme mluvili o invariantních podprostorech, tj. rovinách protínajících počátek. Popis působení rotace na roviny počátkem neprocházející je složitější.

3. Geometrické principy mechaniky

V této kapitole se budeme zabývat Hamiltonovskou mechanikou na symplektických a Poissonových varietách. Vybudujeme matematický aparát, s jehož pomocí budeme moci zkoumat problém vícedimenzionálních setrvačníků. První podkapitola poskytuje přehledové shrnutí základů geometrické mechaniky. Intuitivní úvod do problematiky může čtenář nalézt například v Podolský [4], obšírněji se tématem zabývá Marsden [2]. Ve druhé podkapitole se více do hloubky věnujeme symetriím Hamiltonovských systému vůči akcím Lieových grup. V abstraktní podobě zformulujeme větu Emmy Noetherové o zachovávajících se veličinách. Speciální pozornost budeme věnovat symetriím vzniknuvším kotečným zvihem nějaké akce Lieovy grupy na konfiguračním prostoru. Ve třetí podkapitole zmíníme pojem integrability a uvedeme známou Arnold-Liouvilleovu pro úplně integrabilní systémy. Ve čtvrté podkapitole naznačíme důležitost symplektické redukce pro zjednodušsení Hamiltonovských systémů a uvedeme jednoduchý příklad.

3.1 Mechanika na symplektických a Poissonových varietách

Definice 3.1.1. Dvojici (M, ω), kde M je $2n$ dimenzionální varieta a $\omega \in \mathcal{E}^2(M)$ je 2-forma splňující

1. Antisymetrii: $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ pro každá $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$;
2. Nedegenerovanost: Přiřazení $\mathbf{X}_m \in T_mM \mapsto \omega_m(\mathbf{X}_m, -) \in T_m^*M$ je pro každé $m \in M$ a $\mathbf{X}_m \in T_mM$ izomorfismus;
3. Uzavřenost: Platí $\quad \mathrm{d}\omega = 0$

nazýváme *symplektickou varietou.*

Poznámka 3.1.2. Požadavek antisymetrie v kombinací s nedegenerovaností vyžaduje, aby dimenze m variety M byla sudá . Determinant antisymetrické matice A liché dimenze je totiž vždy nulový. To snadno nahlédneme následující úpravou vycházející ze základních vlastností determinantu, totiž

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^m \det(A).$$

Poslední rovnost platí, protože -1 je násoben každý řádek A.

Příklady 3.1.3. Následující prostory jsou symplektickými varietami:

1. Reálný $2n$ dimenzionální prostor $\mathbb{R}^{2n}[q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n]$ se standardní symplektickou formou

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i.$$

2. Kotečný prostor T^*Q libovolné variety Q se symplektickou formou

$$\omega = -\mathrm{d}\theta,$$

pro *Liouvillovu 1-formu* $\theta \in \mathcal{E}^1(T^*Q)$ definovanou předpisem

$$\theta_{\alpha_q} = \alpha \circ \pi_{*,\alpha_q}$$

pro všechny $\alpha_q \in T_q^*Q$, $q \in Q$, kde

$$\pi : T^*Q \to Q \quad , \quad \pi(\alpha_q) = q$$

je kanonická projekce. Vyházeje z otevřeného okolí $U \subseteq Q$ s lokálními souřadnicemi $[q^1, \ldots, q^n]$ můžeme na okolí $T^*U \subseteq T^*Q$ definovat tzv. kanonické souřadnice $[q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n]$ takové, že pro $\alpha_q \in T_q^*U$, $[q] = (q^1, \ldots, q^n)$ je

$$\alpha_q = p_1 \mathrm{d}_q q^1 + \ldots + p_n \mathrm{d}_q q^n,$$

respektive za bázi T_q^*Q bereme diferenciály souřadnicových funkcí. Liouvillovu 1-formu lze pak na T^*U psát jako

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q^i.$$

Pro souřadnicovou podobu symplektické 2-formy ω na T^*U dostáváme snadnou aplikací diferenciálu výraz

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i.$$

3. Sféra S^2 se standardními sférickými souřadnicemi $[\alpha, \beta]$ nechť je vybavena formou objemu

$$\omega = \sin(\alpha)\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta.$$

Forma ω je zjevně nedegenerovaná a antisymetrická. Uzavřenost nahlédneme snadno i bez výpočtu, neboť dimenze S^2 je 2 a $\mathrm{d}\omega \in \mathcal{E}^3(S^2) = \emptyset$.

Lemma 3.1.4. Buď (M, ω), $\dim(M) = 2n$ symplektická varieta ($\partial M = 0$). Jestliže je M kompaktní, pak ω není exaktní.

Důkaz : Je-li ω symplektická forma na M, pak

$$\mathrm{vol} = \frac{(-1)^{1/2n(n-1)}}{n!}\,\omega^{\wedge n}\ , \mathrm{vol} \in \mathcal{E}^{2n}(M)$$

je forma objemu na M. To plyne snadno z nedegenerovanosti ω. Na nějakém otevřeném okolí $U \subset M$ s lokálními souřadnicemi $[q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n]$ má forma vol díky volbě koeficientu u $\omega^{\wedge n}$ vyjádření

$$\mathrm{vol} = \mathrm{d}q^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}p_n.$$

Nyní pro spor předpokládejme, že $\omega = \mathrm{d}\theta$, $\theta \in \mathcal{E}^1(M)$. Snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[\theta \wedge (\mathrm{d}\theta)^{\wedge(n-1)}] = &\ \mathrm{d}\theta \wedge (\mathrm{d}\theta)^{\wedge(n-1)} - \theta \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}\theta^{\wedge(n-1)}) = \\ = &\ \mathrm{d}\theta \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\theta = K\omega^{\wedge n} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

pro vhodné $K \neq 0$. Z kompaktnosti M plyne

$$\int_M \mathrm{vol} = \int_M K\omega^{\wedge n} \neq 0.$$

Použitím Stokesovy věty a vyjádření (3.1.1) ovšem dostáváme

$$\int_M \mathrm{vol} = \int_M \mathrm{d}[\theta \wedge (\mathrm{d}\theta)^{\wedge(n-1)}] = \int_{\partial M} \theta \wedge (\mathrm{d}\theta)^{\wedge(n-1)} = 0,$$

neboť $\partial M = \emptyset$. Vyvodili jsme tedy spor. $\square$

Věta 3.1.5. Sféra S^{2n}, $n > 1$ není symplektická.

Důkaz : V důkazu se využije lemmatu (3.1.4) a známého faktu algebraické topologie a sice, že $H^2(S^{2n}) = 0$, kde $H^2(S^{2n})$ je druhá kohomologická grupa S^{2n}. Nechť existuje symplektická forma $\omega \in \mathcal{E}^2(S^{2n})$. Podle definice je ω uzavřená. Zároveň ale z lemmatu (3.1.4) plyne, že ω není exaktní. Je tedy $\omega \in H^2(S^{2n}) = 0$. □

Definice 3.1.6. Trojici (M, ω, H) nazveme *Hamiltonovským systémem*, jestliže (M, ω) je symplektická varieta a $H \in \mathcal{F}(M)$. Funkci H nazveme *Hamiltoniánem* systému (M, ω, H).

Definice 3.1.7. Nechť (M, ω, H) je Hamiltonovský systém. Vektorové pole $\mathbf{X}_H \in \mathfrak{X}(M)$ nazveme *Hamiltonovským vektorovým polem* pro Hamiltonián H, pokud platí

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}_H}\omega = \mathrm{d}H. \tag{3.1.2}$$

Hamiltonovými kanonickými rovnicemi máme na mysli rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(m) = (\mathbf{X}_H)_{\varphi_t(m)}, \tag{3.1.3}$$

kde φ_t je tok Hamiltonovského vektorového pole $\mathbf{X}_H$ a $m \in M$, $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka 3.1.8.

1. Rovnice (3.1.2) znamenají rovnost 1-forem, tj. že v každém bodě $m \in M$ a pro každý vektor $v \in T_mM$ platí $\omega_m((\mathbf{X}_H)_m, v) = \mathrm{d}_mH[v]$.

2. Pro Hamiltonovský systém (M, ω, H) Hamiltonovské pole $\mathbf{X}_H \in \mathfrak{X}(M)$ vždy existuje alespoň lokálně. Přiřazení $\mathrm{d}_mH \in T^*_mM \mapsto (\mathbf{X}_H)_m \in T_mM$ je totiž z nedegenerovanosti ω v každém bodě $m \in M$ izomorfismus a snadno se ověří, že $\mathbf{X}_H \in \mathfrak{X}(M)$.

3. Zmínili jsme též pojem *toku* φ_t vektorového pole $\mathbf{X}_H$. To je stručně řečeno zobrazení $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to M$, $\varphi_t(m) = \varphi(t, m)$ takové, že platí rovnost (3.1.3) pro každé $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a $m \in M$. Samotné rovnice (3.1.3) pak znamenají to, že pro každé $m \in M$, $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ je $(\mathbf{X}_H)_{\varphi_{t_0}(m)}$ rovno tečnému vektoru $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{t=t_0}\varphi_t(m)$ křivky $\varphi_-(m) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{M}$ v bodě $t = t_0$. Křivku $\varphi_-(m)$ nazýváme *integrální křivkou* pole $\mathbf{X}_H$ procházející bodem $m \in M$. Toky vektorových polí existují lokálně, a sice z existenční věty pro řešení soustavy lineární diferenciálních rovnic. *Úplné vektorové pole* je takové vektorové pole, které

připouští maximální tok $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$. V tom případě platí vztah $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ pro všechna t, $s \in \mathbb{R}$ a $\{\varphi_t,\, t \in \mathbb{R}\}$ je *jednoparametrická grupa difeomorfismů* na M. Na přiřazení $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_t \in \mathcal{F}(M)$ lze také nahlížet jako na akci Abelovské grupy $\mathbb{R}$ difeomorfismy na M. Podrobně se problematice toků vektorových polí věnuje Lee [6].

4. Abychom si mohli lépe představit, co rovnice (3.1.2) a (3.1.3) znamenají, je výhodné uvést si jejich podobu v lokálních souřadnicích. Citujme důležitou větu ze symplektické geometrie, zvanou *Darbouxova věta*. „Ke každému bodu $m \in M$, kde (M, ω) je symplektická varieta, existuje okolí $U(m) \subseteq M$ a na něm lokální souřadnice $[q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n]$ (Darbouxovy souřadnice) takové, že souřadnicové vyjádření symplektické formy ω na $U(m)$ je

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i. \text{ “}$$

Zvolme tedy nějaké okolí $U(m) \subseteq M$ bodu $m \in M$ na němž existují Darbouxovy souřadnice $[q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n]$. Dosazením do definice vnějšího součinu diferenciálních forem

$$\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_j = \mathrm{d}q^i \otimes \mathrm{d}p_j - \mathrm{d}p_j \otimes \mathrm{d}q^i$$

se snadno přesvědčíme, že pro souřadnicová vektorová pole $\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \in \mathfrak{X}(U(m))$ je $\omega_z(\frac{\partial}{\partial q^i}_z, \frac{\partial}{\partial q^j}_z) = \omega_z(\frac{\partial}{\partial p_i}_z, \frac{\partial}{\partial p_j}_z) = 0$ a $\omega(\frac{\partial}{\partial q^i}_z, \frac{\partial}{\partial p^j}_z) = \delta_{ij}$ pro všechna $z \in U(m)$. Souřadnicové vyjádření ω na celém U je tedy

$$[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková $n \times n$ matice. Rovnice (3.1.2) pro Hamiltonovské vektorové pole $\mathbf{X}_H$ spolu s Hamiltonovskými kanonickými rovnicemi (3.1.3) přejdou na U do podoby známé z klasické mechaniky

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q^j(t), p_j(t)) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q^j(t), p_j(t)),$$

kde $(q^i(t), p_i(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ je integrální křivka Hamiltonovského pole $\mathbf{X}_H$ ležící v U a procházející nějakým bodem $m_0 \in U(m)$, $[m_0] = (q^1(0), \ldots, q^n(0), p_1(0), \ldots, p_n(0))$.

Definice 3.1.9. Pro symplektickou varietu (M, ω) definujeme *Poissonovy závorky* $\{-,-\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ vztahem

$$\{F, G\}(m) = \omega_m(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g), \; m \in M \tag{3.1.4}$$

pro F, $G \in \mathcal{F}(M)$.

Poznámka 3.1.10.

1. Korektnost definice ověříme z bodu (2) poznámky (3.1.8). Hamiltonovská pole $\mathbf{X}_F$ a $\mathbf{X}_G$ lokálně existují a rovnost (3.1.4) znamená, že v každém bodě $m \in M$ platí $\{F, G\}(m) = \omega_m((\mathbf{X}_F)_m, (\mathbf{X}_G)_m)$. Je patrné, že $\{F, G\} : M \to \mathbb{R}$ je opět hladká funkce na M.

2. V Darbouxových souřadnicích $[q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n]$ na $U \subseteq M$ mají závorky $\{-,-\}$ tvar

$$\{F, G\}(q^j, p_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q^i}(q^j, p_j)\frac{\partial g}{\partial p_i}(q^j, p_j) - \frac{\partial f}{\partial p_i}(q^j, p_j)\frac{\partial g}{\partial q^i}(q^j, p_j).$$

Definice 3.1.11. *Poissonovy závorky* na varietě M jsou bilineární operátor $\{-,-\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, jenž pro všechny F, G, $H \in \mathcal{F}(M)$ splňuje

1. Antisymetrii: $\{F, G\} = -\{G, F\}$
2. Jakobiho identitu: $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$
3. Derivační vlastnost: $\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$.

Jsou-li na M udány nějaké Poissonovy závorky $\{-,-\}$, nazýváme dvojici $(M, \{-,-\})$ *Poissonovou varietou.*

Poznámka 3.1.12.

1. Lze ukázat, viz Marsden [2], že libovolné Poissonovy závorky jsou dány antisymetrickým kontravariantním *Poissonovým tenzorem* $\mathbf{B}$. Respektive existuje hladké tenzorové pole $\mathbf{B}$, že v každém bodě $m \in M$ platí

   $$\{F, G\}(m) = \mathbf{B}_m(\mathrm{d}_m F, \mathrm{d}_m G)$$

   pro všechna $F, G \in \mathcal{F}(M)$.

2. Závorky z definice (3.1.4) splňují všechny vlastnosti z definice (3.1.11). Každá symplektická varieta (M, ω) je tedy Poissonovou, ale ne naopak.

Příklad 3.1.13. Příklady Poissonových variet, které nejsou symplektické lze nalézt v podkapitole (3.4) o redukci nebo v kapitole (4) o setrvačnících. Zde zmiňme například Lie-Poissonovy závorky na funkcích f, $g \in \mathcal{F}(\mathfrak{so}^*(3))$, kde $\dim(\mathfrak{so}^*(3)) = 3$.

Definice 3.1.14. Buď $(M, \{-,-\})$ Poissonova varieta. Trojici $(M, \{-,-\}$ $, H)$ nazveme Hamiltonovským systémem s Hamiltoniánem $H \in \mathcal{F}(M)$. Pro Hamiltonovský systém $(M, \{-,-\}, H)$ definujeme Hamiltonovské vektorové pole $\mathbf{X}_H$ předpisem

$$\mathbf{X}_H[F] = \{F, H\}$$

pro každou $F \in \mathcal{F}(M)$. Hamiltonovy rovnice systému $(M, \{-,-\}, H)$ jsou opět rovnicemi pro tok φ_t pole $\mathbf{X}_H$.

Poznámka 3.1.15. Snadno se ověří, že na symplektické varietě (M, ω) definice (3.1.14) a (3.1.7) splývají.

Definice 3.1.16. Řekneme, že hladké zobrazení $\varphi : M_1 \to M_2$ mezi dvěma symplektickými varietami (M_1, ω_1) a (M_2, ω_2) je *symplektické*, jestliže platí

$$\varphi^*[\omega_2] = \omega_1,$$

tedy $(\omega_1)_m(u, v) = (\omega_2)_{\varphi(m)}(\varphi_{*,m}[u], \varphi_{*,m}[v])$ pro každé u, $v \in T_mM_1$ a $m \in M_1$. Pokud jsou M_1 a M_2 jen Poissonovými varietami se závorkami $\{-,-\}_1$ a $\{-,-\}_2$, pak φ je *Poissonovské*, jestliže

$$\{f, g\}_2 \circ \varphi = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1$$

pro všechny f, $g \in \mathcal{F}(M_2)$.

Poznámka 3.1.17.

1. Například tok φ_t Hamiltonovského vektorového pole $\mathbf{X}_H$ je pro každé $t \in \mathbb{R}$ symplektické, resp. Poissonovské zobrazení. Důkaz lze najít v Marsden [2].

2. Symplektické difeomorfismy jsou v klasické mechanice známy pod pojmem *kanonické transformace*. Zachovávají totiž tvar Hamiltonových kanonických rovnic.

Tvrzení 3.1.18. Nechť $(M, \{-,-\}, H)$ je Hamiltonovský systém. Pak pro libovolnou $F \in \mathcal{F}(M)$ platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \varphi_t) = \{F, H\} \circ \varphi_t,$$

kde φ_t je tok Hamiltonovského pole $\mathbf{X}_H$.

Důkaz : Z Hamiltonových kanonických rovnic na Poissonově varietě a použitím řetízkového pravidla máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \varphi_t)(m) = \mathrm{d}F_{\varphi_t(m)}[(\mathbf{X}_H)_{\varphi_t(m)}] = (\mathbf{X}_H)_{\varphi_t(m)}[F] = \{F, H\}(\varphi_t(m))$$

pro všechna $m \in M$, $t \in \mathbb{R}$. Tím je důkaz proveden. □

Definice 3.1.19. *Integrálem pohybu* Hamiltonovského systému $(M, \{-,-\}, H)$ máme na mysli hladkou funkci $F \in \mathcal{F}(M)$, že

$$\{F, H\} = 0.$$

Poznámka 3.1.20. Nechť $F \in \mathcal{F}(M)$ je integrálem pohybu Hamiltonovského systému $(M, \{-,-\}, H)$. Potom z tvrzení (3.1.18) máme $F \circ \varphi_t = \text{konst} = F$ a F se tedy nemění podél integrálních křivek $\mathbf{X}_H$.

Věta 3.1.21.(Zákon zachování energie) Funkce $H \in \mathcal{F}(M)$ je integrálem pohybu Hamiltonovského systému $(M, \{-,-\}, H)$.

Důkaz : Plyne triviálně z antisymetrie Poissonových závorek.. □

Definice 3.1.22. Funkci $C \in \mathcal{F}(M)$ na Poissonově varietě $(M, \{-,-\})$ nazveme *Casimirovou funkcí*, jestliže pro každé $F \in \mathcal{F}(M)$ platí

$$\{F, C\} = 0.$$

Poznámka 3.1.23.

1. Použitím derivační vlastnosti Poissonnových závorek a jejich linearity dostáváme pro každou $F \in \mathcal{F}(M)$ a konstantu $K \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned} \{K, F\} = {} & \{1K, F\} = 1\{K, F\} + K\{1, F\} = K\{1, F\} + K\{1, F\} = \\ = {} & 2\{K, F\}, \end{aligned} .$$

   Odtud $\{K, F\} = 0$ pro každou $F \in \mathcal{F}(M)$. Konstanty jsou tedy triviálními Casimirovými funkcemi.

2. Nechť se dva Hamiltoniány H_1, $H_2 \in \mathcal{F}(M)$ liší o Casimirovu funkci $C \in \mathcal{F}(M)$, tj. $H_1 = H_2 + C$. Pak máme pro každou $F \in \mathcal{F}(M)$

$$\mathbf{X}_{H_2}[F] = \{F, H_2\} = \{F, H_1 - C\} = \{F, H_1\} = \mathbf{X}_{H_1}[F].$$

Hamiltonovské systémy $(M, \{-,-\}, H_1)$ a $(M, \{-,-\}, H_2\}$ tedy v tomto smyslu „generují stejnou mechaniku.“

3.2 Integrabilita

Definice 3.2.1. Řekneme, že Hamiltonovský systém (M, ω, H), $\dim(M) = 2n$, je *úplně integrabilní*, jestliže existují funkce $F_i \in \mathcal{F}(M)$, $i = 1, \ldots, n$ splňující následující požadavky:

1. Involutivnost: Po dvou komutují vzhledem k $\{-,-\}$, tj. $\{F_i, F_j\} = 0$ pro všechna i, $j \in \{1, \ldots, n\}$;
2. Involuce s H: Každé F_i je integrálem pohybu H;
3. Nezávislost: Funkce F_i jsou nezávislé v tom smyslu, že existuje otevřená hustá podmnožina $W \subseteq M$, na které jsou $\mathrm{d}F_1, \ldots, \mathrm{d}F_n$ lineárně nezávislé.

Poznámka 3.2.2.

1. Jedná se o tzv. integrabilitu v Liouvillově smyslu
2. Definici formulujeme pro symplektické variety (M, ω). Lze jí ovšem rozšířit i na variety Poissonovské. Důležitá věta ze symplektické geometrie tvrdí, že každá Poissonovská varieta $(M, \{-,-\})$ je disjunktním sjednocením svých symplektických vnořených podvariet $(M_\alpha, \omega_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$ takových, že ω_α je kompatibilní s $\{-,-\}$. Dimenze symplektické podvariety M_α, $\dim(M_\alpha) = 2m \leq n = \dim(M)$ je rovna hodnosti Poissonova tenzoru $\mathbf{B}$ příslušného k $\{-,-\}$. Počet k nezávislých Casimirových funkcí odpovídá minimální kodimenzi tenzoru $\mathbf{B}$ na M. Pro symplektické podvariety M_α s $\dim(M_\alpha) = 2m$ tedy platí, že m je menší nebo rovno dolní celé části z $\frac{1}{2}(n - k)$. Integrabilní systém $(M, \{-,-\}, H)$ na $(M, \{-,-\})$ pak definujeme požadavkem integrability ve smyslu definice (3.2.1) systémů $(M_\alpha, \omega_\alpha, H_\alpha)$ pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$, kde H_α je zúžení H na M_α.

Příklad 3.2.3.

1. Uvažme Hamiltonovský systém $(T^*\mathbb{R}^n, \omega, H)$ s Hamiltoniánem
$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}A\|\mathbf{p}\|^2 + \frac{1}{2}B\|\mathbf{q}\|^2$$
v globálních kanonických souřadnicích $[q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n]$. Jedná se o sférický n dimenzionální harmonický oscilátor. Lze ověřit, že H a $\frac{1}{2}n(n-1)$ složek $(\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})_{ij} = q^i p_j - q^j p_i$ jsou integrály pohybu $(T^*\mathbb{R}^n, \omega, H)$, a že z nich lze vybrat systém n nezávislý v involuci. Hamiltonovský systém $(T^*\mathbb{R}^n, \omega, H)$ je tedy úplně integrabilní systém.

2. Další příklady integrabílních Hamiltonovských systému nalezneme v kapitole (4), kde se budeme zabývat setrvačníky.

Následující věta je důležitým výsledkem teorie integrabilních Hamiltonovských systémů.

Věta 3.2.4.(Liouville-Arnoldova) Nechť (M, ω, H), $\dim(M) = 2n$ je úplně integrabilní Hamiltonovský systém. Nechť $c \in \mathbb{R}^n$ je regulární hodnotou $F = (F_1, \ldots, F_n)$. Pak existuje $k \in \{0, \ldots, n\}$, že $F^{-1}(c)$ je difeomorfní $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}^k$.

3.3 Symetrie a zachovávající se veličiny

Definice 3.3.1. *Symetrií* Hamiltonovského systému $(M, \{-,-\}, H)$ nazveme difeomorfismus $\varphi : M \to M$ takový, že $H = H \circ \varphi$.

Poznámka 3.3.2.

1. Snadno nahlédneme, že symetrie Hamiltoniánu tvoří grupu, takzvanou grupu symetrií.

2. Jak uvidíme dále, zvláště důležitý je případ, když je Hamiltonovský systém symetrický vůči akci nějaké Lieovy grupy.

Definice 3.3.3. Nechť má Lieova grupa G levou akci difeomorfismy $\psi : G \times M \to M$ na varietě M. *Infinitezimální generátor* $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$ akce ψ definujeme pro každé $\xi \in \mathfrak{g}$ vztahem
$$(\xi_M)_m = (\psi_-(m))_{*,e}[\xi],$$
kde $(\psi_-(m))_{*,e} : \mathfrak{g} \to T_m M$ je tečné zobrazení od hladké funkce $\psi_-(m) : g \in G \mapsto \psi(g, m) \in M$, $e \in G$ je jednotka a $\mathfrak{g} = T_e G$ je Lieova algebra G.

Poznámka 3.3.4.

1. Definice je ekvivalentní tomu, že pro všechna $\xi \in \mathfrak{g}$ je

$$(\xi_M)_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{t=0} \psi(\gamma(t), m)$$

pro každé $m \in M$ a každou hladkou křivku $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ takovou, že $\gamma(0) = e$, $\gamma'(0) = \xi$.

2. Lze ukázat, že přiřazení

$$\xi \in \mathfrak{g} \mapsto \xi_M \in \mathfrak{X}(M)$$

je antihomomorfismus Lieových algeber $\mathfrak{g}$ a $(\mathfrak{X}(M), [-,-])$, tj. platí

$$[\xi, \eta]_M = -[\xi_M, \eta_M]$$

pro všechna ξ, $\eta \in \mathfrak{g}$. Důkaz lze nalézt například v Marsden [2].

3. Infinitezimální generátor je termín formalizující pojmy „infinitezimálního posunutí“, „infinitezimální otočení“, atp. známe z klasické mechaniky.

Definice 3.3.5. Nechť má Lieova grupa G akci Poissonovými difeomorfismy $\psi_g : M \to M$ na Poissonově varietě $(M, \{-,-\})$ a nechť je dáno lineární zobrazení $J : \xi \in \mathfrak{g} \to J_\xi \in \mathcal{F}(M)$ takové, že

$$\xi_M = \mathbf{X}_{J_\xi}$$

pro každé $\xi \in \mathfrak{g}$, kde $\mathbf{X}_{J_\xi}$ je Hamiltonovské vektorové pole Hamiltoniánu J_ξ. Potom funkci $\mathbf{J} : M \to \mathfrak{g}^*$ definovanou předpisem

$$\langle \mathbf{J}(m), \xi \rangle = J_\xi(m) \quad , \xi \in \mathfrak{g},\, m \in M$$

nazýváme *momentovým zobrazením* (anglicky „momentum map“).

Poznámka 3.3.6. Symbolem $\langle -,- \rangle$ budeme mít vždy na mysli párování prvků $\pi \in \mathfrak{g}^*$, $\xi \in \mathfrak{g}$, tj. nedegenerované bilineární zobrazení $\langle -,- \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$.

Věta 3.3.7.(Noetherové) Nechť $(M, \{-,-\}, H)$ je Hamiltonovský systém, G je Lieova grupa a nechť existuje momentové zobrazení $\mathbf{J} : M \to \mathfrak{g}^*$ pro G a $(M, \{-,-\})$. Nechť pro každé $\xi \in \mathfrak{g}$ platí

$$\xi_M[H] = 0. \tag{3.3.1}$$

Potom je $\mathbf{J}$ integrálem pohybu $(M, \{-,-\}, H)$.

Důkaz : Nechť $\xi \in \mathfrak{g}$ je libovolné. Z linearity závorek platí

$$0 = \xi_M[H] = \mathbf{X}_{J_\xi}[H] = \{H, J_\xi\} = -\{\langle \mathbf{J}, \xi \rangle, H\},$$

to jest „ξ-tá složka“ $\mathbf{J}$ komutuje s H, to jest je z definice integrálem pohybu. □

Poznámka 3.3.8.

1. Předchozí věta je velice důležitá. Umožňuje nám z pouhé znalosti symetrií systému $(M, \{-,-\}, H)$ usuzovat na zachovávající se veličiny.

2. Nechť je Hamiltonovský systém $(M, \{-,-\}, H)$ symetrický na nějakou akci ψ Lieovy grupy G na M Poissonovými difeomorfismy ψ_g. Je tedy

   $$H \circ \psi_g = H \tag{3.3.2}$$

   pro každé $g \in G$. Derivací rovnosti (3.3.2) podle g v $e \in G$ ve směru $\xi \in \mathfrak{g}$ v pevném bodě $m \in M$ dostáváme

   $$(\xi_M)_m[H] = 0.$$

   Zachování H podél ψ_g pro každé $g \in G$ tedy implikuje „infinitezimální zachování“ ve smyslu rovností (3.3.1) pro každé $\xi \in \mathfrak{g}$.

Definice 3.3.9. Nechť má Lieova grupa G akci ψ difeomorfismy na varietě Q. *Tečný a kotečný zdvih* akce ψ na TQ a T^*Q definujeme jako

$$\begin{array}{rrl} T\psi : & G \times TQ & \to TQ \\ & (g, (q, v_q)) & \mapsto (\psi_g(q), (\psi_g)_{*,q}(v_q)) \\ T^*\psi : & G \times T^*Q & \to T^*Q \\ & (g, (q, \pi_q)) & \mapsto (\psi_g(q), (\psi_{g^{-1}})^*_{\psi_g(q)}(\pi_q)). \end{array}$$

pro všechna $g \in G$, $v_q \in T_qQ$, $\pi_q \in T_q^*Q$.

Poznámka 3.3.10.

1. Z vlastností skládání tečných a kotečných zobrazení je snadné ověřit, že $T\psi$ a $T^*\psi$ jsou také hladké akce G na TQ a T^*Q. Pokud je ψ levá/pravá akce, jedná se též o levou/pravou akci.

2. Jestliže o nějaké akci G na T^*Q ukážeme, že jde o kotečný zdvih akce G na Q vyplývají odtud některé její výhodné vlastnosti. Například je automaticky zaručena existence momentové funkce a existuje pro ni explicitní vyjádření.

Tvrzení 3.3.11. Nechť má Lieova grupa G akci ψ difeomorismy $\psi_g : Q \to Q$ na varietě Q. Kotečný zdvi $T^*\psi : G \times T^*Q \to T^*Q$ má na $M = T^*Q$ momentovou funkci $\mathbf{J} : T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ danou předpisem

$$\langle \mathbf{J}(\alpha_q), \xi \rangle = \alpha_q[\xi_Q]$$

kde $q \in Q$, $\alpha_q \in T_q^*Q$ a $\xi_Q \in \mathfrak{X}(Q)$ je infinitezimální generátor akce ψ grupy G na Q.

Důkaz : Pro každé $\xi \in \mathfrak{g}$ máme definovanou funkci $J_\xi(\alpha_q) = \langle \mathbf{J}(\alpha_q), \xi \rangle$, $\alpha_q \in T_q^*Q$, $q \in Q$. Potřebujeme ukázat, že ξ_M je Hamiltonovské vektorové pole Hamiltoniánu J_ξ. Jelikož je $M = T^*Q$ vybavena kanonickou symplektickou formou $\omega = -\mathrm{d}\theta$, chceme vlastně ukázat platnost Hamiltonovy rovnice $\mathbf{i}_{\xi_M}\omega = \mathrm{d}J_\xi$, respektive rovnice $-\mathbf{i}_{\xi_M}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}J_\xi$ pro všechna $\xi \in \mathfrak{g}$. Připomeňme známou Cartanovu identitu

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\alpha = \mathrm{d}\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\alpha + \mathbf{i}_{\mathbf{X}}\mathrm{d}\alpha, \tag{3.3.3}$$

kde $\alpha \in M$, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ a $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ je Lieova derivace podél $\mathbf{X}$. S použitím této identity můžeme psát

$$-\mathbf{i}_{\xi_M}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}(\mathbf{i}_{\xi_M}\theta) - \mathcal{L}_{\xi_M}\theta. \tag{3.3.4}$$

Podle definice je $\theta_{\alpha_q} = \alpha_q \circ \pi_{*,\alpha_q}$ pro $q \in Q$, $\alpha_q \in T_q^*$. Odtud a z vlastností kotečného zdvihu máme

$$\theta_{\alpha_q}[(\xi_M)_{\alpha_q}] = \alpha_q[\pi_{*,\alpha_q}((\xi_M)_{\alpha_q})] = \alpha_q[(\xi_Q)_q] = J_\xi(\alpha_q),$$

tedy první člen na pravé straně rovnice (3.3.4) je $\mathrm{d}J_\xi$ pro každé $\xi \in \mathfrak{g}$. Označme φ_t tok pole ξ_M na M a ψ_t tok pole ξ_Q na Q. Zbývá ukázat, že

$\mathcal{L}_{\xi_M}\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t)^*(\theta) = 0$. Pro $q \in Q$, $\alpha_q \in T^*_q Q$, $t \in \mathbb{R}$ a libovolné $\mathbf{v} \in T_{\alpha_q}(T^*Q)$ počítejme

$$((\varphi_t)^*_{\alpha_q}(\theta_{\varphi_t(\alpha_g)}))[\mathbf{v}] = \theta_{\varphi_t(\alpha_q)}[(\varphi_t)_{*,\alpha_q}(\mathbf{v})] = (\varphi_t(\alpha_q))[\pi_{*,\alpha_q}((\varphi_t)_{*,\alpha_q}[\mathbf{v}])] =$$
$$= (\varphi_t(\alpha_q))[(\pi \circ \varphi_t)_{*,\alpha_q}[\mathbf{v}]].$$

Protože $\pi \circ \varphi_t = \psi_t \circ \pi$, můžeme v úpravách předešlého výrazu pokračovat následovně

$$(\varphi_t(\alpha_q))[(\pi \circ \varphi_t)_{*,\alpha_q}[\mathbf{v}]] = (\varphi_t(\alpha_q))[(\psi_t \circ \pi)_{*,\alpha_q}[\mathbf{v}]] =$$
$$= (\varphi_t(\alpha_q))[(\psi_t)_{*,q}(\pi_{*,\alpha_q}[\mathbf{v}])] = ((\psi_t)^*_q[\varphi_t(\alpha_q)])[\pi_{*,\alpha_q}[\mathbf{v}]].$$

Z vlastnosí kotečného zdvihu je $((\psi_t)^*_q[\varphi_t(\alpha_q)]) = \alpha_q$, a tedy

$$((\psi_t)^*_q[\varphi_t(\alpha_q)])[\pi_{*,\alpha_q}[\mathbf{v}]]. = \alpha_q[\pi_{*,\alpha_q}(\mathbf{v})] = \theta_{\alpha_q}[\mathbf{v}].$$

To platí pro každé $\mathbf{v} \in T_{\alpha_q}(T^*Q)$ a ve všech bodech $q \in Q$, $\alpha_q \in T^*_q Q$, pročež dostáváme $\mathcal{L}_{\xi_M}\theta = \theta$ □

Poznámka 3.3.12. Snadnou úpravou poslední části důkazu (3.3.11) bychom mohli ukázat, že kotečný zdvih $T^*\varphi : T^*Q \to T^*Q$ libovolného difeomorfismu $\varphi : Q \to Q$ je symplektický.

Příklad 3.3.13. Vraťme se k příkladu z kapitoly (3.2). Zachovávající se veličina $\mathbf{x} * \mathbf{p} \in \mathfrak{so}^*(n)$ je momentovou funkcí kotečného zdvihu $T^*\psi$ akce ψ grupy $SO(n)$ na $\mathbb{R}^n$ rotacemi. Pro $S \in SO(n)$ je tedy

$$\psi_S : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto S\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dále

$$(T^*\psi)_S : (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{R}^n \mapsto (S\mathbf{x}, S\mathbf{P}) \in T^*\mathbb{R}^n.$$

Infinitezimální generátor ψ je

$$(\xi_{\mathbb{R}^n})_{\mathbf{x}} = \xi\mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n \ , \xi \in \mathfrak{so}(n)$$

a momentová funkce $\mathbf{J} : T^*\mathbb{R}^n \to \mathfrak{so}^*(n)$ je určena požadavkem

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \xi \rangle = \mathbf{p} \cdot \xi\mathbf{x},$$

což je, jak se snadno ověří, právě $\mathbf{x} * \mathbf{p}$. Navíc je akce $T^*\psi$ grupy G zřejmě symetrií $(H, M, \{-,-\})$. Podle poznámky (3.3.8) a věty (3.3.7) dostáváme, že $\mathbf{J}$ se skutečně zachovává.

3.4 Redukce Hamiltonovských systémů

Definice 3.4.1. Nechť má Lieova grupa G akci $\psi : G \times M \to M$ difeomorfismy ψ_g na Poissonově varietě $(M, \{-,-\})$. Řekneme, že tato akce splňuje *redukční předpoklad*, jestliže platí

1. Semiregularita: Stabilizátor $G_m = \{g \in G : \psi_g(m) = m\}$ je pro každé $m \in M$ triviální, tj. $G_m = \{e\}$.
2. Topologický předpoklad: Konvergence x_n v M a $\psi_{g_n}(x_n)$ v M implikuje existenci vybrané konvergentní posloupnosti z (g_n).
3. Poissonovskost: Každé ψ_g, $g \in G$ je Poissonovské.

Poznámka 3.4.2.

1. Za předpokladů (1) a (2) je $M/G = \{\mathrm{Orb}(m) : m \in M\}, \mathrm{Orb}(m) = \{\psi_g(m) : g \in G\}$ hladkou varietou a pro každé $m \in M$ je $Orb(m) \subseteq M$ hladkou vloženou podvarietou M.
2. Všimněme si, že topologický předpoklad (2) je automaticky splněn, pokud je G kompaktní. Například $G = SO(n)$.

Tvrzení 3.4.3.(Poissonova redukce) Nechť akce ψ Lieovy grupy G na Poissonově varietě $(M, \{-,-\})$ splňuje redukční předpoklad. Varieta M/G je pak opatřena Poissonovými závorkami $\{-,-\}_{M/G}$, které jsou jednoznačně určeny předpisem

$$\{f, g\}_{M/G} \circ \pi = \{f \circ \pi, g \circ \pi\}$$

pro všechna f, $g \in \mathcal{F}(M/G)$ a kanonickou projekci $\pi : M \to M/G$.

Důkaz : Náznak důkazu lze najít v Marsden [2]. $\square$

Definice 3.4.4. Nechť $(M, \{-,-\}, H)$ je Hamiltonovský systém symetrický na akci ψ grupy Lieovy G splňující redukční předpoklad. Pak trojici $(M/G, \{-,-\}_{M/G}, h)$, kde $h \in \mathcal{F}(M/G)$ je jediná funkce taková, že

$$H = h \circ \pi$$

nazveme *redukovaným Hamiltononovským systémem* systému $(M, \{-,-\}, H)$. Funkci h nazýváme *redukovaným Hamiltoniánem.*

Příklad 3.4.5. Hamiltonián padajícího bodu o hmotnosti m v konstantním tíhovém poli $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ je ve tvaru

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$$

a jeho „fázovým prostorem“ je $M = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^{2n}$ se standardní symplektickou strukturou

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i.$$

Napsáním Hamiltonových rovnic, tj.

$$X_H^{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad , \quad X_H^{x^i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3.4.1}$$

dostáváme snadno pro integrální křivku $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \in M$ rovnice

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{g} \quad , \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

s řešením

$$\mathbf{p}(t) = -t\mathbf{g} + \mathbf{p}_0 \quad , \quad \mathbf{x}(t) = -\frac{t^2}{2m}\mathbf{g} + t\mathbf{p}_0 + \mathbf{x}_0, \tag{3.4.2}$$

pro nějaká $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ a $t \in \mathbb{R}$, přesně podle očekávání z klasické mechaniky. Můžeme si všimnout, že Abelovská Lieova grupa $G = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{g} \cdot \mathbf{a} = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ působící na M akcí

$$\psi_{\mathbf{a}}((\mathbf{x}, \mathbf{p})) = (\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{p}) \;, \mathbf{a} \in G, \; (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*. \tag{3.4.3}$$

je symetrií studovaného Hamiltonovského systému. Snadno se ověří, že se vlastně jedná o kotečný zdvih akce

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \in G \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Pro akci (3.4.3) je zřejmě $G_{(\mathbf{x},\mathbf{p})} = \{0\}$ pro každé $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$ a konvergence po složkách zajišťuje i topologický předpoklad (přitom G není kompaktní). Tedy (3.4.3) splňuje redukční předpoklad. Zřejmě je každé $\psi_{\mathbf{a}}$ symplektické a tudíž Poissonovo zobrazení. Akce ψ tudíž splňuje redukční předpoklad. Z definice ψ plyne, že orbita prvku $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ je

$$\mathrm{Orb}((\mathbf{x}, \mathbf{p})) = \{(\mathbf{x} + \mathbf{v}, \mathbf{p}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}\} = \{(\mathbf{y}, \mathbf{p}) : \mathbf{y} \cdot \mathbf{g} = d, \; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\},$$

kde $d = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}$. Prostor M/G tedy můžeme parametrizovat souřadnicemi $(d, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Podle definice (3.4.4) dostáváme redukovaný Hamiltonián

$$h(d, p_1, \ldots, p_n) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + d$$

na redukovaném prostoru $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*/\mathbb{R}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$. Nyní spočteme redukované Poissonovy závorky. Uvažme projekci $\pi : M \to M/G$ a její souřadnicové vyjádření $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}, \mathbf{p})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. Pro $f \in \mathcal{F}(M/G)$ pak platí

$$\frac{\partial(f \circ \pi)}{\partial x^i} = g^i \frac{\partial f}{\partial d} \quad , \quad \frac{\partial(f \circ \pi)}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Na základě věty (3.4.3) máme pro redukované Poissonovy závorky funkcí f, $g \in \mathcal{F}(M/G)$ předpis

$$\begin{aligned}\{f, g\}_{M/G}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}, \mathbf{p}) = & \sum_{i=1}^n g^i (\tfrac{\partial f}{\partial d} \tfrac{\partial g}{\partial p_i} - \tfrac{\partial f}{\partial p_i} \tfrac{\partial g}{\partial d}) = \\ = & \ \mathbf{g} \cdot (\tfrac{\partial f}{\partial d}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \nabla_{\mathbf{p}} g(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \tfrac{\partial g}{\partial d}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p})).\end{aligned}$$

Všimněmě si, že tyto závorky neodpovídají těm klasickým na $\mathbb{R}^{n+1}$. Hamiltonovské vektorové pole $\mathbf{X}_h$ na M/G nyní musíme počítat podle definice. S uvážením

$$\nabla_{\mathbf{p}} h = \frac{\mathbf{p}}{m}, \ \frac{\partial h}{\partial d} = 1$$

dostáváme

$$\mathbf{X}_h[f] = \{f, h\} = \mathbf{g} \cdot (\frac{\partial f}{\partial d} \frac{\mathbf{p}}{m} - \nabla_{\mathbf{p}} f)$$

a

$$\mathbf{X}_h(d, \mathbf{p}) = \frac{1}{m}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{p}, -m\mathbf{g}).$$

Rovnice pro jeho integrální křivku $(d(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ jsou pak

$$\dot{d}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{g} \cdot \mathbf{p}(t) \quad , \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{g}.$$

Dostáváme řešení

$$\mathbf{p}(t) = -t\mathbf{g} + \mathbf{p}_0 \quad , \quad d(t) = \mathbf{g}(-\frac{t^2}{2m}\mathbf{g} + t\mathbf{p}_0 + \mathbf{d}_0) \ t \in \mathbb{R}$$

pro nějaké $(\mathbf{d}_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Podle tvrzení (3.4.3) má být v každém čase $t \in \mathbb{R}$

$$\pi(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = (\mathbf{g} \cdot (-\frac{t^2}{2m}\mathbf{g} + t\mathbf{p}_0 + \mathbf{d}_0), -t\mathbf{g} + \mathbf{p}_0) \quad (3.4.4)$$

a při označení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{g}$ to přesně odpovídá našim předpokladům . Uveďme ještě zachovávající se veličiny původního systému (H, M, ω) plynoucí ze symetrie na G. Jedná se o kotečný zdvih, tedy můžeme využít tvrzení (3.3.11). Infinitezimální generátor akce $(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \in G \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\xi_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}) = \xi \ , \xi \in \mathfrak{g} = G, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Z toho máme pro momentovou funkci

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \cdot \xi = \mathbf{p} \cdot \xi \ , (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in M, \ \xi \in \mathfrak{g}.$$

Protože ξ je kolmé na $\mathbf{g}$ je

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|^2}.$$

Zachovávající se veličinou je tedy vektor $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|^2}$, tj. složka hybnosti kolmá na $\mathbf{g}$.

Poznámka 3.4.6. Z předchozího příkladu jsme mohli jasně vidět, v čem spočívá význam redukce. Symetrie H na G nám dovolila redukovat $2n$ stupňů volnosti (minimální počet nezávislých parametrů postačujících pro popis systému) v proměnných $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ na $n + 1$ nezávislých parametrů $(d, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Příklad byl jednoduchý a řešení na M jsme snadno explicitně zkonstruovali. Představme si ovšem, že jsme v situaci, kdy Hamiltonovský systém (H, M, ω) řešit neumíme. Na M můžeme mít například nějakou nevhodnou parametrizaci, ve které jsou Hamiltonovské rovnice nepřehledné a těžko řešitelné. Objevíme však nějakou grupu symetrií G systému $(H, M, \{-,-\})$, zkonstruujeme redukovaný Hamiltonovský systém $(h, M/G, \{-,-\}_{M/G})$ a zjistíme, že jeho řešení je překvapivě jednoduché. Podle věty Emmy Noether můžeme ještě nalézt integrály pohybu původního systému $(M, \{-,-\}, H)$. Redukce a zachovávající se veličiny jsou spolu v úzké korespondenci. Za jistých předpokladů lze z řešení redukovaného systému $(M/G, \{-,-\}_{M/G}, h)$ a ze znalosti integrálů pohybu systému $(M, \{-,-\}, H)$ plynoucích ze symetrie na akci G zrekonstruovat řešení původního systému. To je ovšem součástí složité teorie redukce, kterou se nebudeme v takové míře zabývat, ač některé její výsledky použijeme. Zájemci mohou podrobnosti nalézt v Marsden a kol. [7]. V kapitole použijeme některé výsledky teorie redukce k získání redukovaných systémů setrvačníků.

4. Setrvačníky

V této kapitole definujeme pojmy volného a těžkého vícerozměrného setrvačníku a budeme metodami z kapitoly (3) zkoumat jejich symetrie. Podle věty Emmy Noetherové pak určíme příslušné integrály pohybu. Napíšeme zobecněné vícerozměrné Eulerovy rovnice pro vývoj tělesového momentu hybnosti volného i těžkého setrvačníku a ukážeme, jakým způsobem z nich lze ve třech rozměrech získat Eulerovy rovnice klasické. Ve třetí podkapitole se budeme věnovat symetrickému Lagrangeovu setrvačníku v $\mathbb{R}^4$ a naznačíme, jak souvisejí symetrie tělesa reprezentovaného zobecněným tenzorem setrvačnosti se symetriemi Hamiltonovského systému.

4.1 Volný vícerozměrný setrvačník

Definice 4.1.1. *Volný n-rozměrný setrvačník* definujeme jako Hamiltonovský systém $(T^*SO(n), \omega, H)$ s

$$H(R, P_R) = \frac{1}{2}\langle (\mathcal{L}_R)^*_E(P_R), \mathcal{J}^{-1}((\mathcal{L}_R)^*_E(P_R))\rangle,\ R \in SO(n),\ P_R \in T^*_R SO(n), \tag{4.1.1}$$

kde izomorfismus $\mathcal{J} : \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{so}^*(n)$ je dán předpisem

$$\mathcal{J}(\Omega) = Q\Omega + \Omega Q \quad ,\Omega \in \mathfrak{so}(n),$$

pro nějakou diagonální positivně definitní matici $Q \in M_n(\mathbb{R})$. Veličinu

$$M(R, P_R) = (\mathcal{L}_R)^*_E(P_R) \in \mathfrak{so}^*(n)$$

nazýváme *momentem hybnosti vzhledem k tělesu* a veličinu

$$m(R, P_R) = (\mathcal{R}_R)^*_E(P_R)$$

momentem hybnosti vzhledem k prostoru.

Poznámka 4.1.2.

1. Zaveďme konvenci, že symboly R a P_R budeme mít vždy na mysli nějaké prvky $R \in SO(n)$ a $P_R \in T^*_R SO(n)$. Symboly $\mathcal{L}$ a $\mathcal{R}$ označují akci levými a pravými translacemi grupy $SO(n)$ na sobě.

2. Připomeňme, že duál $\mathfrak{so}^*(n)$ k Lieově algebře antisymetrických matic $\mathfrak{so}(n)$ identifikujeme s $\mathfrak{so}(n)$ skrze nedegenerované párování

$$\begin{array}{llll} \langle -,-\rangle : & \mathfrak{so}^*(n)\times\mathfrak{so}(n) & \to & \mathbb{R} \\ & (M,\Omega) & \mapsto & \frac{1}{2}tr(M^T\Omega). \end{array}$$

3. Systém (4.1.1) popisuje tuhé těleso rotující kolem nějakého pevného bodu bez přítomnosti vnějšího potenciálového pole. Matice Q má význam *zobecněného tenzoru setrvačnosti* počítaného vzhledem k bodu upevnění. Samotný Hamiltonián (4.1.1) má význam *rotační kinetické energie.*

4. Snadno nahlédneme, že zobrazení $\mathcal{J}$ z předchozí definice je pro Q uvedených vlastností izomorfismem $\mathfrak{so}(n)$ a $\mathfrak{so}^*(n)$. Ve složkách totiž platí

$$[\mathcal{J}(\Omega)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(Q_{ik}\Omega_{kj} + \Omega_{ik}Q_{kj}) = (Q_{ii}+Q_{jj})\Omega_{ij},\ \Omega\in\mathfrak{so}(n).$$

Tvrzení 4.1.3.(Symetrie na rotace zleva) Systém volného setrvačníku z definice (4.1.1) je symetrický vůči kotečnému zdvihu $T^*\mathcal{L}$ levé translace $SO(n)$. Integrálem pohybu příslušným této symetrii je

$$\mathbf{J}_{\mathcal{L}}((R,P_R)) = m(R,P_R)\in\mathfrak{so}^*(n), \tag{4.1.2}$$

tj. moment hybnosti v prostoru, resp. $\frac{1}{2}n(n-1)$ složek antisymetrické matice $m(R,P_R)$.

Důkaz : Kotečný zdvih levé translace $\mathcal{L}_S(R) = SR$, S, $R\in SO(n)$ je dle definice (3.3.9)

$$(T^*\mathcal{L})_S(R,P_R) = (\mathcal{L}_S(R), (\mathcal{L}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{L}_S R}(P_R)).$$

Pro infinitezimální generátor $\xi^{\mathcal{L}}_{SO(n)}\in\mathfrak{X}(SO(n))$ akce $\mathcal{L}: SO(n)\times SO(n)\to SO(n)$ platí

$$(\xi^{\mathcal{L}}_{SO(n)})_R = (\mathcal{L}_-(R))_{*,E}[\xi] = (\mathcal{R}_R)_{*,E}[\xi],$$

neboť $\mathcal{L}_S(R) = SR = \mathcal{R}_R(S)$ pro každé $S\in SO(n)$. Momentová funkce $\mathbf{J}_{\mathcal{L}}: T^*SO(n)\to\mathfrak{so}(n)^*$ je podle tvrzení (3.3.11) dána jako

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{J}_{\mathcal{L}}((R,P_R)),\xi\rangle = {} & P_R[(\xi^{\mathcal{L}}_{SO(n)})_R] = P_R[(\mathcal{R}_R)_{*,E}(\xi)] = \\ = {} & [(\mathcal{R}_R)^*_E(P_R)](\xi) = \langle m(R,P_R),\xi\rangle. \end{aligned}$$

pro všechna $\xi \in \mathfrak{so}(n)$. Jelikož tato rovnost platí pro všechna $\xi \in \mathfrak{so}(n)$ a $\langle -, - \rangle$ je nedegenerované, máme odtud vzorec (4.1.2) pro momentové zobrazení. Abychom ověřili, že je $\mathbf{J}_{\mathcal{L}}$ skutečně integrálem pohybu systému volného setrvačníku zbýva podle tvrzení Emmy Noether ukázat invariantnost Hamiltoniánu H vůči $T^*\mathcal{L}$, tj. $H \circ T^*\mathcal{L} = H$. Zřejmě H závisí jen na tělesovém momentu hybnosti $M(R, P_R) = (\mathcal{L}_R)^*_E(P_R)$. Snadno se přesvědčíme, že pro všechna R, $S \in SO(n)$ a $P_R \in T^*RSO(n)$ platí

$$\begin{aligned} M[\mathcal{L}_S R, (\mathcal{L}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{L}_S R}(P_R)] &= (\mathcal{L}_{\mathcal{L}_S R})^*_E[(\mathcal{L}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{L}_S R}(P_R)] = \\ &= (\mathcal{L}_{S^{-1}} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{L}_S R})^*_E[P_R]. \end{aligned}$$

Přitom

$$(\mathcal{L}_{S^{-1}} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{L}_S R})[O] = \mathcal{L}_{S^{-1}}(SRO) = \mathcal{L}_R O,\ O \in SO(n),$$

a tedy

$$M[\mathcal{L}_S R, (\mathcal{L}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{L}_S R}(P_R)] = (\mathcal{L}_R)^*_E[P_R] = M(R, P_R).$$

Kotečný zdvih levé translace tedy na moment hybnosti působí jen triviálně, a tak se při něm H nemění. □

Tvrzení 4.1.4. Systém volného setrvačníku $(T^*SO(n), \omega, H)$ se redukuje na systém $(\mathfrak{so}^*(n), \{-,-\}_-, h)$, kde:

1. Tzv. Lie-Poissonovy závorky funkcí f, $g \in \mathcal{F}(\mathfrak{so}^*(n))$ jsou

$$\{f, g\}(M) = -\langle M, [\mathrm{d}_M f, \mathrm{d}_M g] \rangle \quad , \quad M \in \mathfrak{so}^*(n) \tag{4.1.3}$$

2. Redukovaný Hamiltonián je

$$h(M) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{J}^{-1}(M), M \rangle \quad , M \in \mathfrak{so}^*(n). \tag{4.1.4}$$

3. Hamiltonovy kanonické rovnice redukovaného systému pro integrální křikvu $M(t) \in \mathfrak{so}^*(n)$, $t \in \mathbb{R}$, pole $\mathbf{X}_h \in \mathfrak{X}(\mathfrak{so}^*(n))$ jsou při označení tzv. *tělesové úhlové rychlosti* $\Omega(t) = \mathcal{J}^{-1}(M(t))$ ve tvaru

$$\dot{M}(t) = [M(t), \Omega(t)] \ . \tag{4.1.5}$$

.

Důkaz : Redukce vychází ze symetrie původního systému vůči $T^*\mathcal{L}$ prezentované v minulém tvrzení. Poissonovskou kanonickou projekcí je $\pi : T^*SO(n) \to \mathfrak{so}^*(n)$ s $\pi(R, P_R) = M(R, P_R)$ a redukované závorky jsou dány předpisem (4.1.3). Blíže viz Marsden [2]. Dále odvodíme Hamiltonovy kanonické rovnice (4.1.5). Jelikož je párování $\langle -, - \rangle$ násobkem ad-invariantní Killingovy formy na $\mathfrak{so}(n)$ máme pro $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{so}^*(n))$ a $M \in \mathfrak{so}^*(n)$ úpravou

$$\{f, h\}_-(M) = -\langle M, [\mathrm{d}_M f, \mathrm{d}_M h] \rangle = \langle M, [\mathrm{d}_M h, \mathrm{d}_M f] \rangle = \langle [M, \mathrm{d}_M h], \mathrm{d}_M f \rangle \tag{4.1.6}$$

Hamiltonovy rovnice pro Hamiltonovské vektorové pole $\mathbf{X}_h \in \mathfrak{X}(\mathfrak{so}^*(n))$ dávají podle definice

$$\{f, h\}_-(M) = (\mathbf{X}_h)_M[f] = \mathrm{d}_M f[(\mathbf{X}_h)_M] = \langle (\mathbf{X}_h)_M, \mathrm{d}_M f \rangle, \tag{4.1.7}$$

neboť $\mathrm{d}_M f \in \mathfrak{so}^{**}(n) \simeq \mathfrak{so}(n)$ a $(\mathbf{X}_h)_M \in T_M\mathfrak{so}^*(n) \simeq \mathfrak{so}^*(n)$. Porovnánnm (4.1.7) a (4.1.6) s uvážením jejich platnosti pro každou $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{so}^*(n))$ a každé $M \in \mathfrak{so}^*(n)$ dostáváme konečně

$$(\mathbf{X}_H)_M = [M, \mathrm{d}_M h].$$

Dosazením $\mathrm{d}_M h = \mathcal{J}^{-1}(M)$ je zřejmé, že Hamiltonovými kanonickými rovnicemi pro tok $M(t)$ pole $\mathbf{X}_H$ jsou skutečně (4.1.5). □

Poznámka 4.1.5. Lze ukázat, že redukovaný systém n-rozměrného volného setrvačníku je integrabilní pro všechna n (ve smyslu integrability na Poissonových varietách zmíněné v předchozí kapitole). Hamiltonovy kanonické rovnice (4.1.5) redukovaného systému jsme díky ad-invariantnosti $\langle -, - \rangle$ převedli do speciálního tvaru, tzv. „Lax pair“, pro který existují sofistikované metody hledání integrálů pohybu. Ty vyžívají faktu, že $M(t)$ jsou spolu v každém čase $t \in \mathbb{R}$ konjugovány maticí $R(t) \in SO(n)$. Popis těchto metod však přesahuje rámec tohoto textu a zájemce odkazujeme např. na přehledovou publikaci M. Audin [1].

4.2 Těžký vícerozměrný setrvačník

Definice 4.2.1. *Těžký n-rozměrný setrvačník* je Hamiltonovský systém $(T^*SO(n), \omega, H)$ s Hamiltoniánem

$$H(R, P_R) = \frac{1}{2}\langle(\mathcal{L}_R)^*_E(P_R), \mathcal{J}^{-1}((\mathcal{L}_R)^*_E(P_R))\rangle + R\mathbf{X}_T \cdot \mathbf{g} \tag{4.2.1}$$

v proměnných $R \in SO(n)$, $P_R \in T^*_R SO(n)$. Zobrazení $\mathcal{J} : \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{so}^*(n)$ je definováno předpisem

$$\mathcal{J}(\Omega) = Q\Omega + \Omega Q \quad , \Omega \in \mathfrak{so}(n)$$

pro nějakou diagonální positivně definitní matici $Q \in M_n(\mathbb{R})$. Konstantní nenulové vektory $\mathbf{X}_T$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme po řadě *vektor hmotného středu* a *vektor gravitace*.

Poznámka 4.2.2.

1. Opět se přidržíme konvence, že symbol R značí prvek $R \in SO(n)$ a symbol P_R prvek $P_R \in T^*_R SO(n)$. Viz poznámku (4.1.2).

2. Tento Hamiltonovský systém popisuje rotaci tuhého tělesa kolem pevného bodu, realizovanou v tíhovém poli určeném vektorem $\mathbf{g}$. Vektor hmotného středu $\mathbf{X}_T$ je při této fyzikální interpretaci vektorem vzhledem k bázi pevné v tělese. Oproti klasickému vektoru hmotného středu je toto $\mathbf{X}_T$ navíc násobené celkovou hmotností tělesa. Vektor gravitace $\mathbf{g}$ je vektorem vzhledem k bázi pevné v prostoru. Matice Q hraje roli zobecněné tenzoru setrvačnosti počítaného vzhledem k bodu upevnění. Prvnímu členu v (4.2.1) říkáme *rotační kinetická energie*, členu druhému pak *potenciál*.

Tvrzení 4.2.3.(Symetrie na rotace zleva) Těžký n-dimensionální setrvačník je symetrický vůči kotečnému zdvihu

$$\begin{array}{rlcl} T^*\mathcal{L}: & G_{\mathbf{g}} \times T^*SO(n) & \to & T^*SO(n) \\ & S, (R, P_R) & \mapsto & (\mathcal{L}_S R, (\mathcal{L}_{S^T})^*_{\mathcal{L}_S R}(P_R)) \end{array}$$

akce $\mathcal{L} : G_{\mathbf{g}} \times SO(n) \to SO(n)$ levými translacemi prvky z

$$G_{\mathbf{g}} = \{S \in SO(n) : S\mathbf{g} = \mathbf{g}\} \simeq SO(n-1).$$

Integrály pohybu jsou

$$\langle \mathbf{J}_{\mathcal{L}}(R, P_R), \xi \rangle = \langle m(R, P_R), \xi \rangle$$

pro všechna $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbf{g}} = \{\mu \in \mathfrak{so}(n) : \mu\mathbf{g} = 0\}$.

Důkaz : Hamiltonián těžkého setrvačníku je součtem Hamiltoniánu volného setrvačníku a potenciálu $R\mathbf{X} \cdot \mathbf{g}$. Hamiltonián volného setrvačníku je invariantní vůči $T^*\mathcal{L}$ podle (4.1.3). Restrikcí levé translace z $SO(n)$ na $G_{\mathbf{g}}$ zachováme i potenciál, neboť pro $R \in SO(n)$ a $S \in G_{\mathbf{g}}$ je $SR\mathbf{X} \cdot \mathbf{g} = R\mathbf{X} \cdot S^T\mathbf{g} = R\mathbf{X} \cdot \mathbf{g}$. Odtud je invariantnost H vůči $T^*\mathcal{L}$ od $G_{\mathbf{g}}$ patrná. Postupem stejným jako v důkazu (4.1.3) dostaneme pro momentové zobrazení $\mathbf{J}_{\mathcal{L}} : T^*SO(n) \to \mathfrak{g}_{\mathbf{g}}^*$ požadavek

$$\langle \mathbf{J}_{\mathcal{L}}(R, P_R), \xi \rangle = \langle m_R(R, P_R), \xi \rangle.$$

Ovšem nyní již jen pro $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbf{g}}$. □

Poznámka 4.2.4. Protože $G_{\mathbf{g}} \simeq SO(n-1)$, dostáváme ve speciálním případě $\mathbf{g} = (0, \ldots, 0, g)$ zachování $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ nezávislých složek momentu hybnosti v prostoru $m_R(R, P_R)$, Konkrétně jsou integrály pohybu složky $(m_R(R, P_R))_{ij}$, $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Tvrzení 4.2.5. Systém těžkého setrvačníku $(T^*SO(n), \omega, H)$ se redukuje na systém $(\mathfrak{se}^*(n), \{-,-\}_-, h)$ s

$$h(M, \Gamma) = \frac{1}{2}\langle M, \mathcal{J}^{-1}(M) \rangle + \Gamma \cdot \mathbf{X} \text{ , } M \in \mathfrak{so}^*(n),\ \Gamma \in (\mathbb{R}^n)^*. \tag{4.2.2}$$

Rovnice pro integrální křivky $(M(t), \Gamma(t)) \in \mathfrak{se}^*(n)$ Hamiltonovského vektorového pole $\mathbf{X}_h$ jsou při označení $\Omega(t) = \mathcal{J}^{-1}(M(t))$ tvaru

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= [M(t), \Omega(t)] - \Gamma(t) \wedge \mathbf{X}_T \\ \dot{\Gamma}(t) &= -\Omega(t)\Gamma(t) \qquad\qquad\qquad , t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

kde zápis $\Gamma(t) \wedge \mathbf{X}$ značí antisymetrickou matici se složkami $(\Gamma(t) \wedge \mathbf{X}_T)_{ij} = \Gamma_i(t)(X_T)_j - \Gamma_j(t)(X_T)_i$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Před samotným důkazem uveďme poznámku.

Poznámka 4.2.6. Duál $\mathfrak{se}^*(n)$ ztotožňujeme s $\mathfrak{se}(n)$ pomocí nedegenerovaného párování $\langle -, - \rangle : \mathfrak{se}^*(n) \times \mathfrak{se}(n) \to \mathbb{R}$ zadaného předpisem

$$\langle (M, \Gamma), (\Omega, v) \rangle = \frac{1}{2} tr(M^T\Omega) + \Gamma \cdot v \tag{4.2.4}$$

pro $(M, \Gamma) \in \mathfrak{se}^*(n)$, $(\Omega, v) \in \mathfrak{se}(n)$.

Důkaz : V předchozím tvrzení jsme ukázali „symetrii na rotace zleva“ prvky z grupy $G_{\mathbf{g}}$. Označíme-li $H_{\mathbf{a}}$ Hamiltonián (4.2.1) s $\mathbf{g} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, je zřejmě $H_{\mathbf{a}}$ na parametru $\mathbf{a}$ hladce závislý. Jak píše Marsden a kol. [8], systém těžkého setrvačníku se redukuje na systém $(\mathfrak{se}^*(n), \{-,-\}_-, h)$ s Lie-Poissonovými závorkami

$$\{f,g\}_-(M,\Gamma) = -\langle M, [\mathrm{d}_{(M,\Gamma)}f, \mathrm{d}_{(M,\Gamma)}g]\rangle \quad f,\, g \in \mathcal{F}(\mathfrak{se}^*(n)),$$

kde $M \in \mathfrak{so}^*(n)$, $\Gamma \in (\mathbb{R}^n)^*$ a $[-,-]$ jsou Lieovy závorky na $\mathfrak{se}(n)$. Další úpravy k získání (4.2.3) jsou podobné jako v důkazu tvrzení (4.1.4) a nebudeme je explicitně vypisovat. Jen si uvědomme, že Lieovy závorky prvků $(\Omega_1,\, v_1), (\Omega_2,\, v_2) \in \mathfrak{se}(n) = \mathfrak{so}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ jsou

$$[(\Omega_1,\, v_1), (\Omega_2,\, v_2)] = (\Omega_1\Omega_2 - \Omega_2\Omega_1, \Omega_1 v_2 - \Omega_2 v_1),$$

a že nelze využít ad-invariance párování jako v důkazu (4.1.4), neboť naše párování (4.2.4) ad-invariantní není. □

Poznámka 4.2.7.

1. Rovnice (4.2.3) bývají označovány jako tzv. *zobecněné Euler-Poincarého rovnice.*

2. Hamiltonovský systém těžkého setrvačníku není obecně integrovatelný, jen v některých speciální případech. Existence dalších netriviálních integrálů pohybu se odvíjí zejména od symetrií zobecněného tenzoru setrvačnosti Q (např. jsou-li některé jeho složky shodné).

Poznámka 4.2.8. Uvažme redukovaný Hamiltonovský systém těžkého třídimenzionálního setrvačníku $(\mathfrak{so}^*(3), \{-,-\}_-, h)$. Zobrazení $\hat{}: \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ definované pro vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ předpisem $\hat{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pro všechna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ je izomorfismem Lieových algeber $(\mathbb{R}^3, \times)$ a $(\mathfrak{so}(3), [-,-])$, tj. platí

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\hat{} = [\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}].$$

Při jeho aplikaci na zobecněné Eulerovy rovnice (4.2.3) obdržíme klasické třídimenzionální Eulerovy rovnice

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}(t) &= \mathbf{M}(t) \times \mathbf{\Omega}(t) + \mathbf{\Gamma}(t) \times \mathbf{X}_T \\ \dot{\mathbf{\Gamma}}(t) &= \mathbf{\Gamma}(t) \times \mathbf{\Omega}(t) \qquad\qquad\qquad , t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

pro křivky $\mathbf{M}(t), \mathbf{\Gamma}(t) \in \mathbb{R}^3$ takové, že $\hat{\mathbf{M}}(t) = M(t)$ a $\hat{\mathbf{\Gamma}}(t) = \Gamma(t)$, kde $(M(t), \Gamma(t))$ je integrální křivka v $\mathfrak{se}^*(3)$. Vektor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t)$ souvisí s vektorem tělesového momentu hybnosti $\mathbf{M}(t)$ vztahem $\mathbf{M}(t) = \mathbf{I}\mathbf{\Omega}(t)$, kde $\mathbf{I}$ je „klasický" tenzor setrvačnosti. Tenzor setrvačnosti $\mathbf{I}$ souvisí se zobecněným tenzorem setrvačnosti Q vztahem $I = \mathrm{tr}(Q)E - Q$. Pro všechna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ navíc platí $\mathbf{a} \cdot I\mathbf{b} = \langle \mathcal{J}(\hat{\mathbf{a}}), \hat{\mathbf{b}} \rangle$. Podrobné fyzikální odvození pohybových rovnic těžkého třírozměrného setrvačníku vycházející z Newtonovské mechaniky může čtenář nalézt v Brdička, Hladík [3].

4.3 Lagrangeův čtyřrozměrný setrvačník

Definice 4.3.1. Lagrangeův čtyřrozměrný setrvačník je těžký čtyřrozměrný setrvačník s následujícími vlastnostmi. Matice Q zobecněného tenzoru setrvačnosti je ve tvaru

$$Q = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad A,\, B > 0, \tag{4.3.1}$$

tj. je invariantní vůči akci konjugací grupy

$$G_Q = SO(2) \times SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}, R_1,\, R_2 \in SO(2) \right\} \subset SO(4).$$

Vektor hmotného středu je ve tvaru

$$\mathbf{X}_T = (X, X, Y, Y)\ , X, Y \in \mathbb{R}. \tag{4.3.2}$$

Hamiltonián Lagrangeova setrvačníku je

$$H(R, P_R) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}^{-1}((\mathcal{L}_R)^*_E(P_R)), (\mathcal{L}_R)^*_E(P_R) \rangle + R\mathbf{X}_T \cdot \mathbf{g}$$

pro $R \in SO(4)$, $P_R \in T^*_R SO(4)$.

Lemma 4.3.2. Buď $\mathcal{J} : \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{so}^*(n)$ zobrazení definované předpisem

$$\mathcal{J}(\Omega) = Q\Omega + \Omega Q$$

pro nějakou matici $Q \in M_n(\mathbb{R})$. Označme

$$G_Q = \{S \in SO(n) : SQS^T = Q\}.$$

Potom pro všechna $S \in G_Q$ a každé $\Omega \in \mathfrak{so}(n)$ platí

$$\mathcal{J}(Ad_S(\Omega)) = Ad^*_{S^T}[\mathcal{J}(\Omega)].$$

Důkaz : Využijeme-li invarianci Q na konjugaci s libovolným prvkem $S \in G_Q$, dostáváme pro každé $\Omega \in \mathfrak{so}(n)$ rovnost

$$\begin{aligned} Ad^*_S[\mathcal{J}(Ad_S(\Omega))] = &\; S^T \mathcal{J}(S\Omega S^T)S = S^T(S\Omega S^T)QS + S^T Q(S\Omega S^T)S = \\ = &\; \Omega(S^T Q S) + (S^T Q S)\Omega = \Omega Q + Q\Omega = \mathcal{J}(\Omega). \end{aligned}$$

Aplikací $Ad^*_{S^T}$ na obě strany rovnosti máme požadované. □

Tvrzení 4.3.3.(Symetrie na rotace zprava) Systém $(T^*SO(4), \omega, H)$ čtyřrozměrného Lagrangeova setrvačníku je symetrický vůči kotečnému zdvihu $T^*\mathcal{R}$ pravé translace $\mathcal{R}$ prvky z $G_Q = SO(2) \times SO(2) \subset SO(4)$, tj. vůči

$$\begin{array}{llll} T^*\mathcal{R}: & G_Q \times T^*_R SO(4) & \rightarrow & T^*_R SO(4) \\ & S,\,(R, P_R),\, P_R \in T^*_R SO(4) & \mapsto & (\mathcal{R}_S(R), (\mathcal{R}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{R}_S R}(P_R)). \end{array}$$

Integrály pohybu $\mathbf{J}_\mathcal{R}(R, P_R)$ příslušné této symetrii jsou dány rovnicí

$$\langle \mathbf{J}_\mathcal{R}(R, P_R), \xi \rangle = \langle M(R, P_R), \xi \rangle \quad , R \in SO(n),\; P_R \in T^*_R SO(n), \qquad (4.3.3)$$

pro všechny prvky $\xi \in \mathfrak{g}_Q$.

Důkaz : Infinitesimální generátor akce pravými translacemi prvky z G_Q na $SO(4)$ je

$$\xi^\mathcal{R}_{SO(4)}(R) = (\mathcal{R}_-(R))_{*,E}(\xi) = (\mathcal{L}_R)_{*,E}(\xi) \quad , \xi \in \mathfrak{g}_Q.$$

Výpočet momentového zobrazení akce $T^*\mathcal{R}$ grupy G_Q na $T^*SO(4)$ dává

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_\mathcal{R}(R, P_R), \xi \rangle = &\; P_R[\xi^\mathcal{R}_{SO(4)}(R)] = P_R[(\mathcal{L}_R)_{*,E}(\xi)] = \langle (\mathcal{L}_R)^*_E(P_R), \xi \rangle = \\ = &\; \langle M(R, P_R), \xi \rangle \end{aligned}$$

pro všechna $\xi \in \mathfrak{g}_Q$ a $R \in SO(4)$, $P_R \in T^*_R SO(4)$. Pokud je H na zmíněnou akci invariantní, veličiny (4.3.3) se podle tvrzení Emmy Noether zachovávají. Ověříme zvlášť $T^*\mathcal{R}$-invariantnost potenciálu $V(R) = R\mathbf{X} \cdot \mathbf{g}$ a kinetické energie $T(R, P_R) = \frac{1}{2}\langle M(R, P_R), \mathcal{J}^{-1}(M(R, P_R)) \rangle$, $R \in SO(4)$, $P_R \in T^*_R SO(4)$. Matice $S \in G_Q = SO(2) \times SO(2)$ je ve tvaru

$$S = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \quad , R_1,\, R_2 \in SO(2).$$

Vzhledem k předpokladu (4.3.1) o tvaru vektoru hmotného středu $\mathbf{X}_T$ odtud ihned plyne $S\mathbf{X}_T = \mathbf{X}_T$, tedy $V(\mathcal{R}_S(R)) = V(R)$ pro všechna $R \in SO(4)$ a $S \in G_{\mathbf{Q}}$. Potenciál se tedy působením $T^*\mathcal{R}$ nemění. Pro důkaz invariance kinetické energie T na $T^*\mathcal{R}$ počítejme

$$\begin{aligned} M(\mathcal{R}_S(R), (\mathcal{R}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{R}_S R}(P_R)) = & \ (\mathcal{L}_{\mathcal{R}_S R})^*_E[(\mathcal{R}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{R}_S R}(P_R)] = \\ = & \ (\mathcal{R}_{S^{-1}} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{R}_S R})^*_E[P_R]. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Pro každou $O \in SO(n)$ je dále

$$(\mathcal{R}_{S^{-1}} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{R}_S R})[O] = \mathcal{R}_{S^{-1}}[RSO] = RSOS^T = (\mathcal{L}_R \circ I_S)[O],$$

kde jsme označili $I_S : SO(n) \to SO(n)$, $I_S(O) = SIS^T$, $O \in SO(n)$, $S \in G_Q$ konjugaci prvky z G_Q. Výraz (4.3.4) pro tělesový moment hybnosti je pak

$$\begin{aligned} M(\mathcal{R}_S(R), (\mathcal{R}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{R}_S R}(P_R)) = & \ (\mathcal{L}_R \circ I_S)^*_E[P_R] = (I_S)^*_E[(\mathcal{L}_R)^*_E(P_R)] = \\ = & \ Ad^*_{S^T}[M(R, P_R)]. \end{aligned}$$

Tělesový moment hybnosti $M(R, P_R)$ se tedy při $(T^*\mathcal{R})_S$ transformuje adjunkcí prvku $S \in G_Q$. Využitím Ad-invariance $\langle -, - \rangle$ a Ad-invariance $\mathcal{J}$ z předchozího lemmatu dostáváme

$$\begin{aligned} T(\mathcal{R}_S(R), (\mathcal{R}_{S^{-1}})^*_{\mathcal{R}_S R}(P_R)) = \tfrac{1}{2}\langle Ad^*_{S^T}[M(R, P_R)], \mathcal{J}^{-1}(Ad^*_{S^T}[M(R, P_R)])\rangle = \\ = \tfrac{1}{2}\langle Ad^*_{S^T}[M(R, P_R)], Ad_S[\mathcal{J}^{-1}(M(R, P_R))]\rangle = T(R, P_R). \end{aligned}$$

Protože $H = T + V$ je tímto důkaz proveden. □

Poznámka 4.3.4. Lieova algebra $\mathfrak{g}_Q$ k Lieově grupě G_Q je

$$\mathfrak{g}_Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & 0 & 0 \\ -\xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 \end{pmatrix}, \ \xi_1, \ \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

se závorkami zděděnými z $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$. Integrály pohybu Lagrangeova čtyřrozměrného setrvačníku jsou podle předchozího tvrzení funkce $\langle M(R, P_R), \xi\rangle$, $R \in SO(n), P_R \in T^*_R SO(n)$ pro všechna $\xi \in \mathfrak{g}_Q$. To můžeme vzhledem ke tvaru matic $\xi \in \mathfrak{g}_Q$ a vzhledem k tomu, že lineární kombinace integrálů pohybu je též integrál pohybu shrnout tím, že se zachovávají složky $[M(R, P_R)]_{12}$, $[M(R, P_R)]_{34}$ tělesového momentu hybnosti.

Tvrzení 4.3.5.(Symetrie na rotace zleva) Hamiltonovský systém čtyřrozměrného Lagrangeova setrvačníku je symetrický na kotečný zvih $T^*\mathcal{L}$ levé translace prvky z grupy $G_{\mathbf{g}} = \{S \in SO(4) : S\mathbf{g} = \mathbf{g}\}$. Integrály pohybu jsou

$$\langle \mathbf{J}_{\mathcal{L}}(R, P_R), \xi \rangle = \langle m(R, P_R), \xi \rangle$$

pro $R \in SO(4)$, $P_R \in T_R^*SO(4)$ a pro všechna $\xi \in \mathfrak{g}_Q$.

Důkaz : Lagrangeův čtyřrozměrný setrvačník je těžký čtyřrozměrný setrvačník. Dále viz tvrzení (4.2.3). □

Poznámka 4.3.6. Je obecně známo, že čtyřrozměrný Lagrangeův setrvačník je úplně integrabilní Hamiltonovský systém. V předešlém textu jsme nalezli integrály pohybu $[M(R, P_R)]_{12}$, $[M(R, P_R)]_{34}$, H a ze „symetrie na rotace zleva" i 3 složky momentu hybnosti v prostoru $m(R, P_R)$. Pro důkaz úplné integrability je třeba $\frac{1}{2}\dim(T^*SO(4)) = \dim(SO(4)) = 6$ nezávislých integrálů pohybu v involuci. Involutivnost a nezávislost našich integrálů jsme neověřovali. Domníváme se však, že tyto předpoklady integrability nesplňují. Dostupná literatura se častěji zabývá otázkou integrability redukovaných systémů. Zde je situace relativně snazší, neboť se problém obecných vícedimenzionálních setrvačníků linearizuje na algebry $\mathfrak{so}(n)$ a $\mathfrak{se}(n)$, se kterými můžeme pracovat jako s reálnými vektorovými prostory.

Literatura

[1] M. Audin, Spinning Tops: A Course on Integrable Systems, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 1999

[2] J. E. Marsden, T. S. Ratiu, Introduction to Mechanics and Symmetry, Texts in Applied Mathematics, Vol. 17, Springer Verlag, 1999, 2nd edition

[3] M. Brdička, A. Hladík, Teoretická mechanika, Academia, Praha, 1987

[4] Jiří Podolský, Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie, Studijní text k "Prosemináři z teoretické fyziky I", MFF UK Praha, 2006

[5] O. Kowalski, Úvod do Riemannovy geometrie, Studijní text UK Praha, 2005

[6] J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, University of Washington, 2000

[7] J.E. Marsden, G. Misiolek, J-P. Ortega, M. Perlmutter, T.S.Ratiu, Hamiltonian Reduction by Stages, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 2007

[8] J. E. Marsden, T.S. Ratiu, A. Weinstein, Semidirect Products and Reduction in Mechanics, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 281, No. 1, American Mathematical Society, 1984