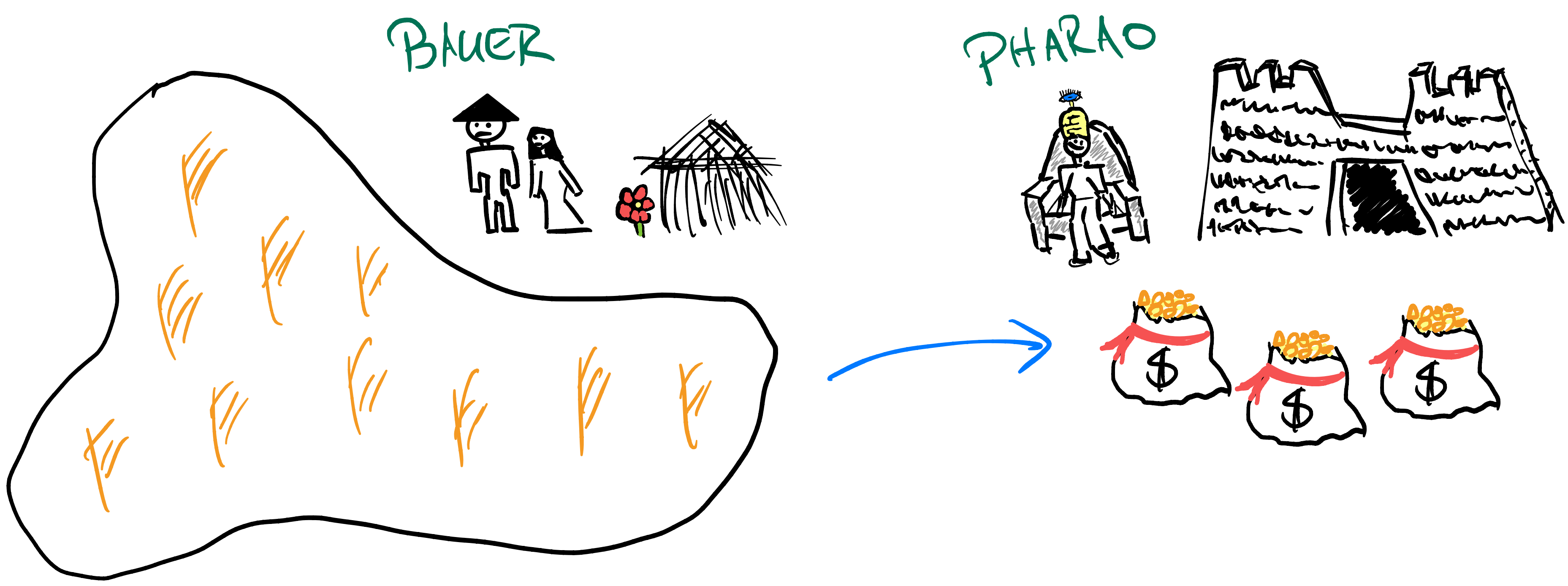
Bestimmung der Feldsteuer im alten Ägypten



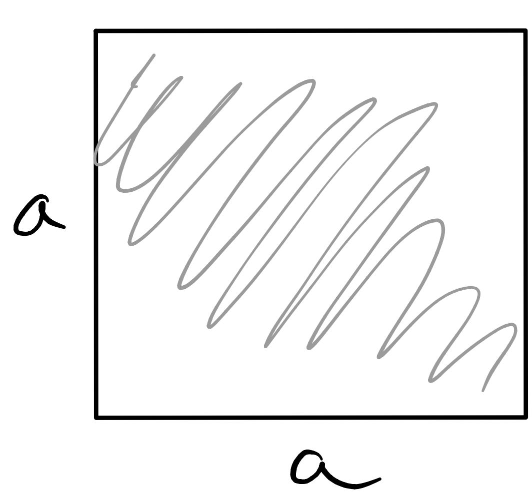
Die Steuer S für das Feld F proportional zu dem Flächeninhalt $A(F)$ von F.

Währung: 1 Deben ~ 13,6 g Geld

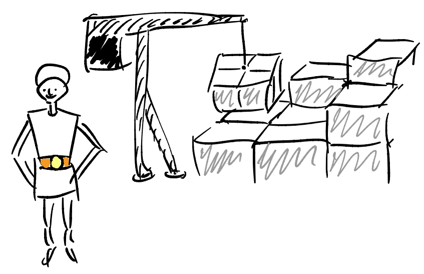
Längeneinheit: 1 meh = Königselle ~ 52,4 cm

a [meh]	S [Deben]
1	1
2	4
3	9
4	16
⋮	⋮
17	

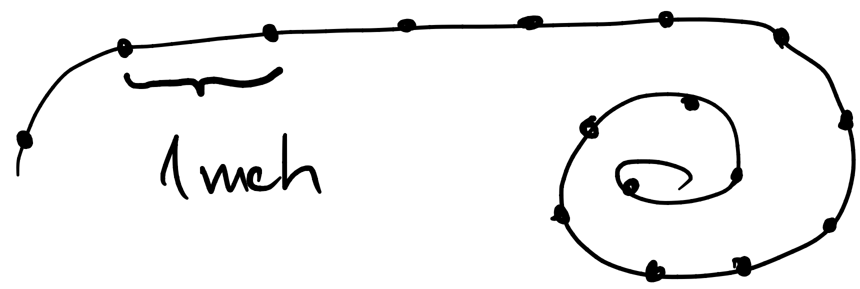
Steuer S / Quadrat mit Seitenlänge a



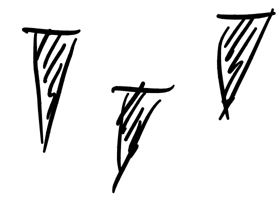
INGENIEUR



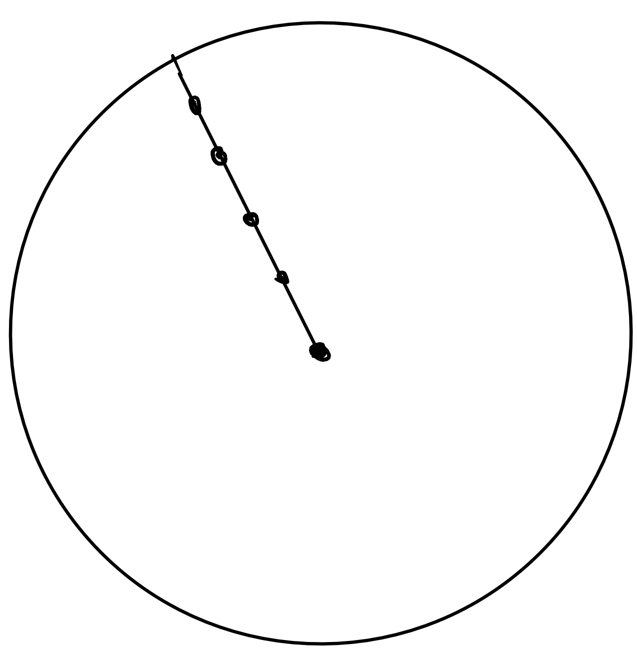
→ Schnur mit Knoten

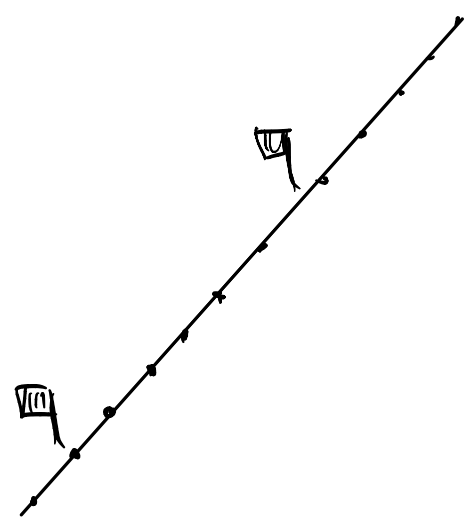


\+ Holzpflöcke

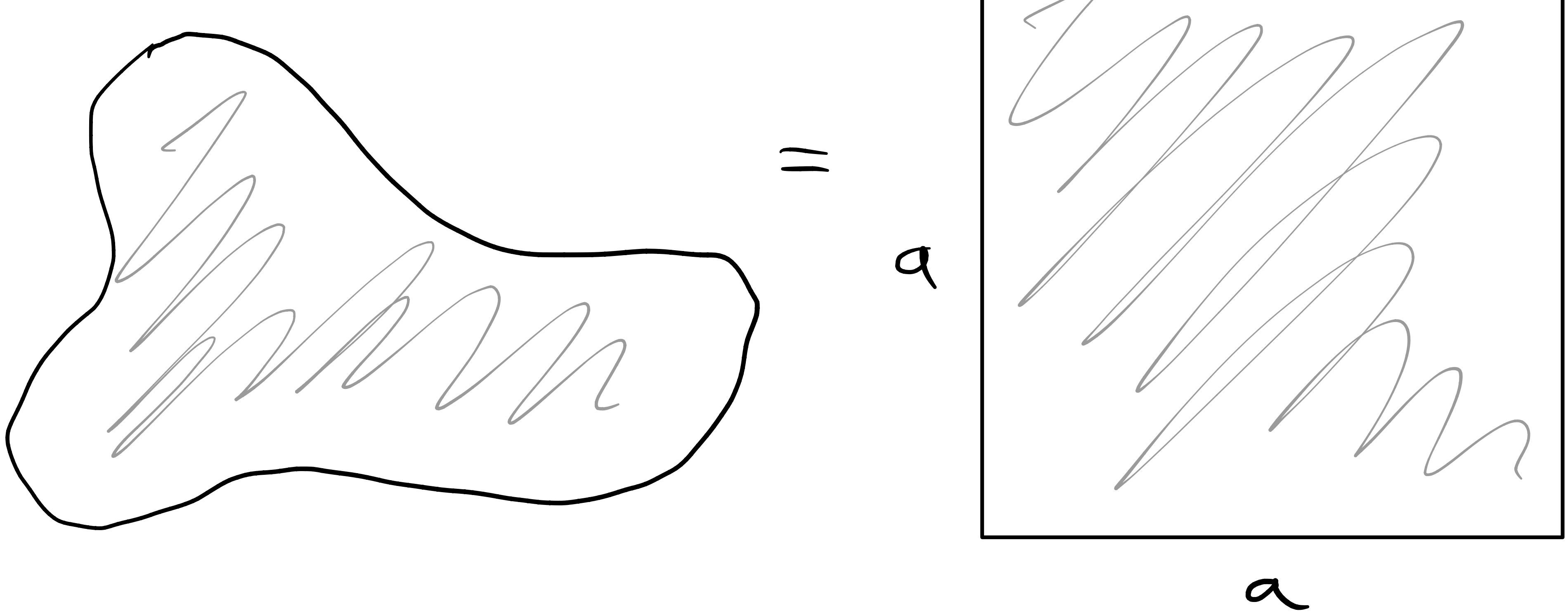


⇒ Konstruktion von Kreisen um einen Punkt mit gewissem Radius und Geraden durch 2 Punkte mit gewisser Länge

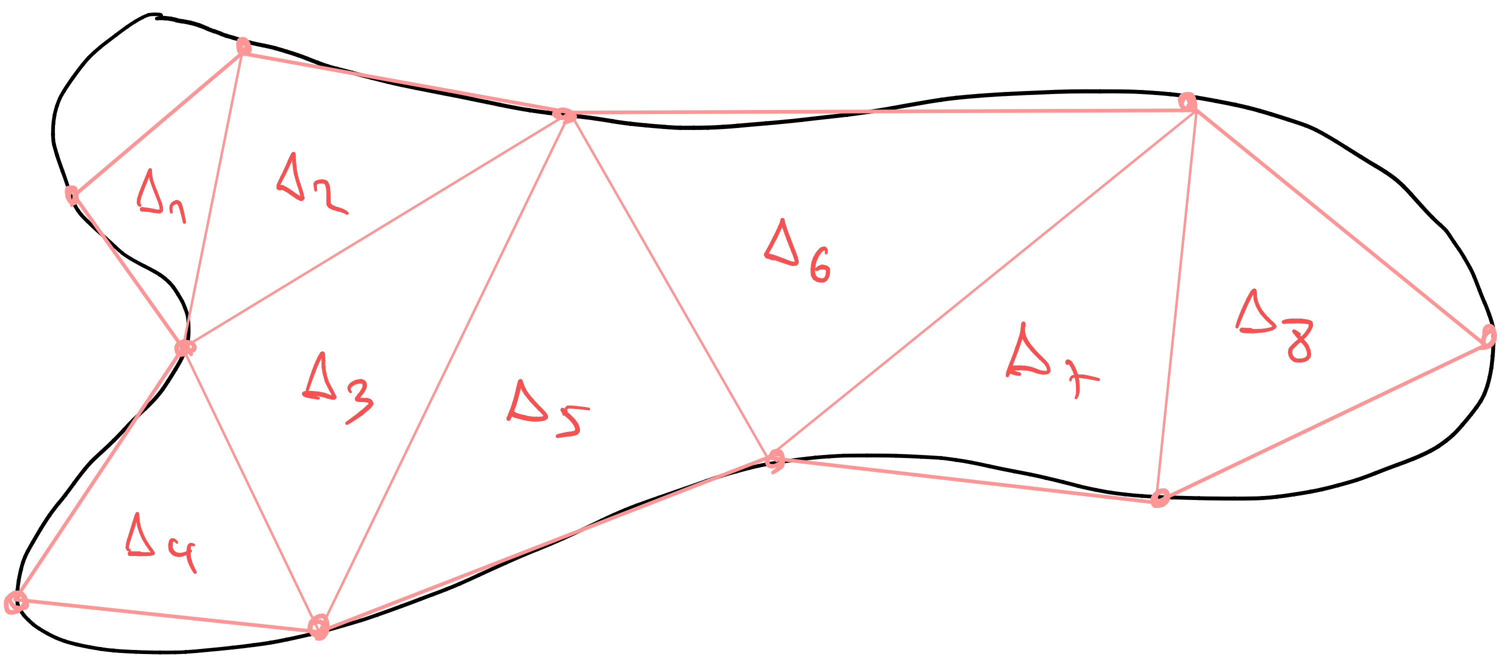




Ziel: Konstruiere Quadrat Q, sodass $A(Q) = A(F)$

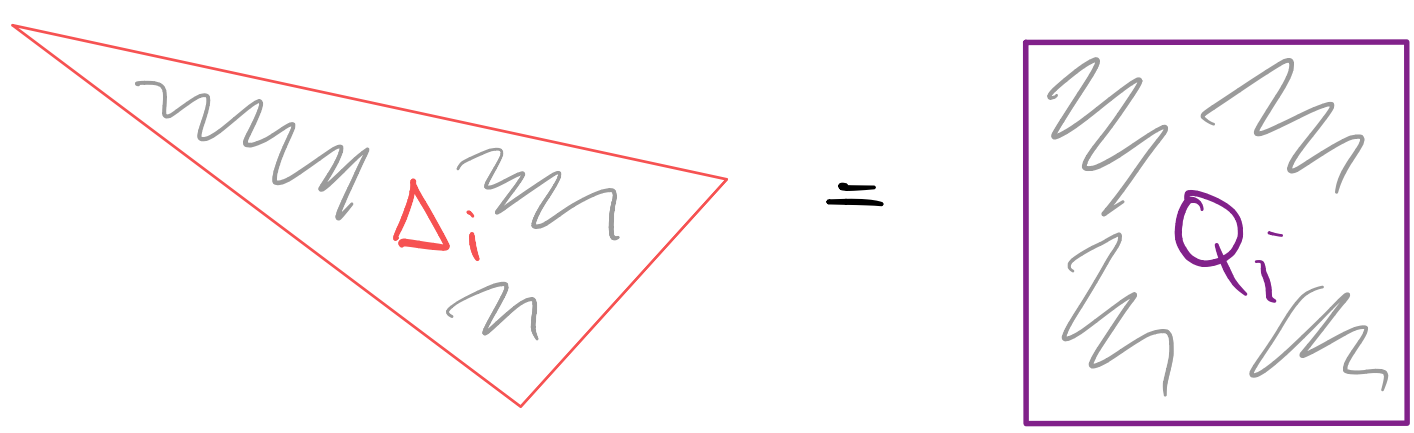


Schritt 1: Approximation mit einem Polygon und ihre Triangulierung

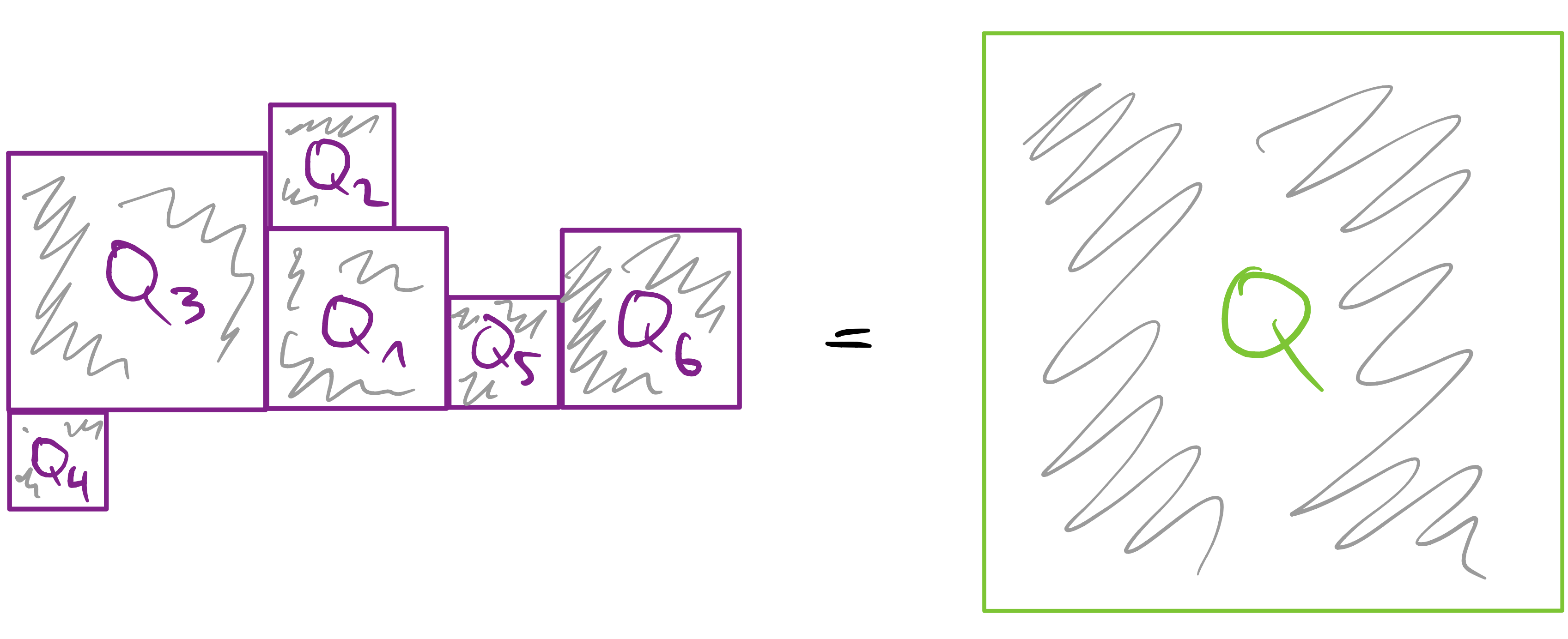


Schritt 2: Für jedes Δ_i konstruiere Quadrat Q_i

sodass $A(\Delta_i) = A(Q_i)$



Schritt 3: Konstruiere Quadrat Q, sodass $\sum A(Q_i) = A(Q)$



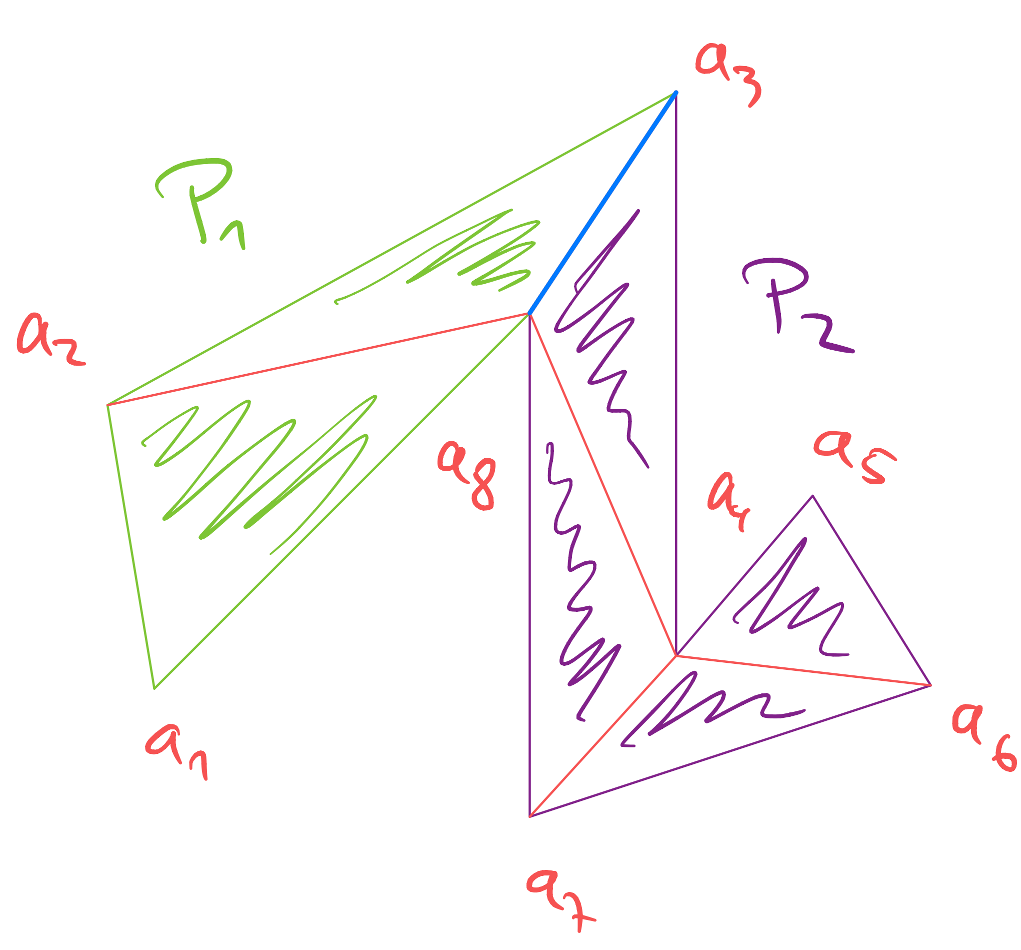
Behauptung 1: Jedes Polygon $P = (a_1, \dots, a_n)$ besitzt eine Triangulierung.

Beweis per Induktion auf n:

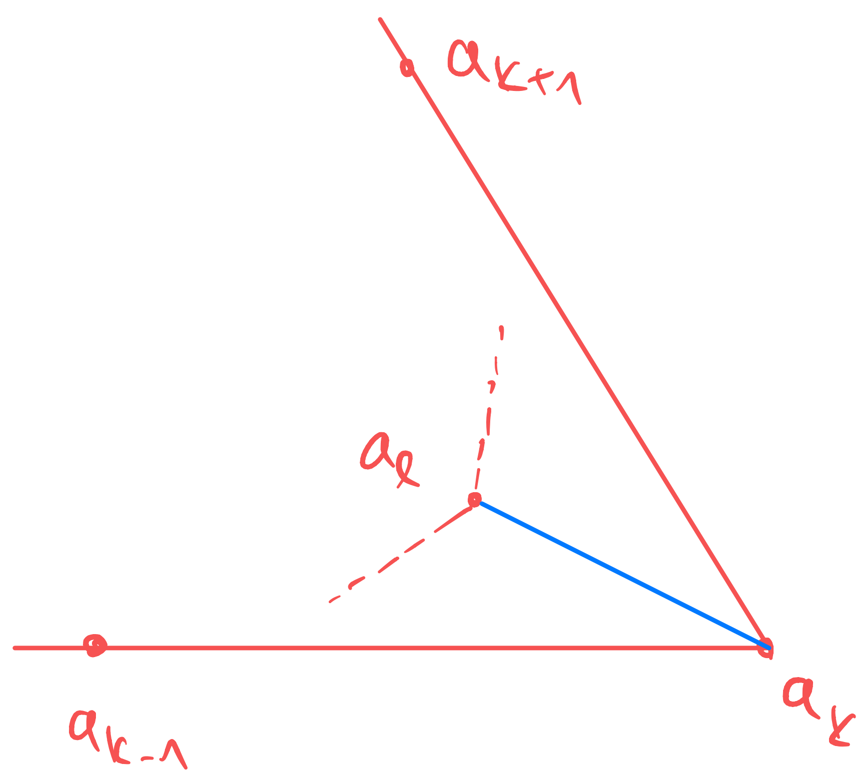
$n=3$: $P =$

✓

$n-1 \to n$: Finde $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $|i-j| \geq 2$, sodass der Segment $[a_i a_j]$ ganz im Inneren von P liegt. Dann sind $P_1 = (a_i, a_j, a_{j+1}, \dots)$ und $P_2 = (a_j, a_i, a_{i+1}, \dots)$ zwei Polygone mit weniger als n Eckpunkten dessen Triangulierungen, die nach der Induktionsvoraussetzung existieren, eine Triangulierung von P induzieren.



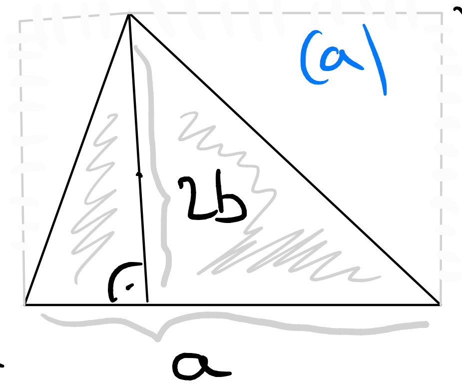
Algorithmus für i, j: Finde den äußerst unteren Eckpunkt a_k der ganz rechts liegt, sodass der innere Winkel zwischen a_{k-1}, a_k, a_{k+1} strikt konvex ist. Falls der Segment $[a_{k-1}, a_{k+1}]$ ganz im Inneren von P liegt, sind wir fertig. Sonst sei a_ℓ der Eckpunkt innerhalb des Dreiecks $[a_{k-1}, a_k, a_{k+1}]$, der am nächsten zu a_k liegt. Dann muss $[a_\ell, a_k]$ ganz im Inneren von P liegen, weil sonst ein von den Eckpunkten des Segments, der (a_ℓ, a_k) schneidet, im $[a_{k-1}, a_k, a_{k+1}]$ und näher als a_ℓ zu a_k liegt ↯

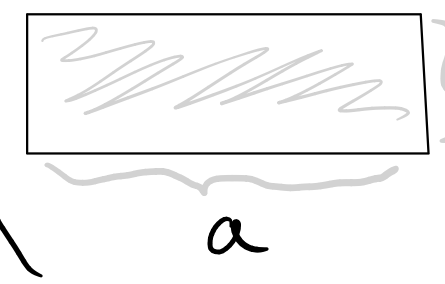


□

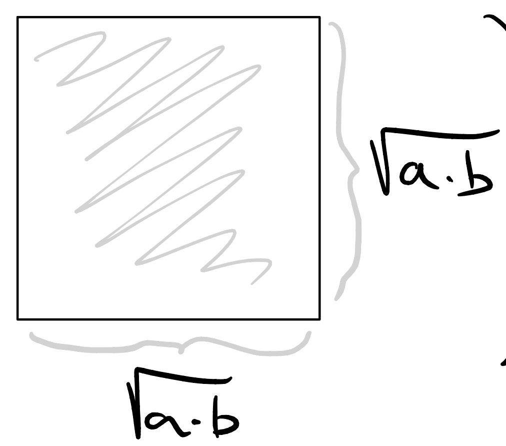
Bemerkung 2: Beweisen Sie die Behauptung für Polygone mit Löchern (in diesem Fall muss $[a_i, a_j]$ das Polygon nicht in zwei Unterpolygone schneiden).

Konstruktion 4: Schritt 2 kann man wie folgt durchführen:

$A\Big($ 

$\Big) = b.a = A\Big($ 

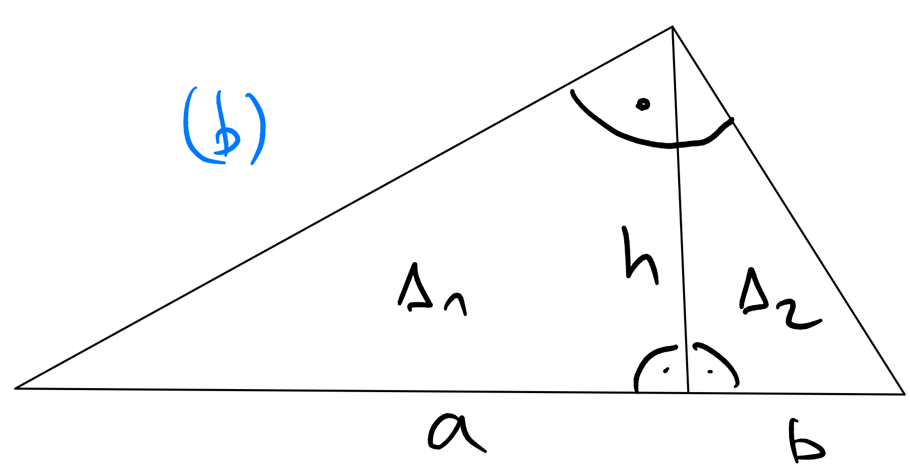
$\Big)$

$= \left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2 = A\Big($ 

$\Big)$

wobei $\sqrt{a\cdot b}$ sich wie folgt konstruieren lässt:

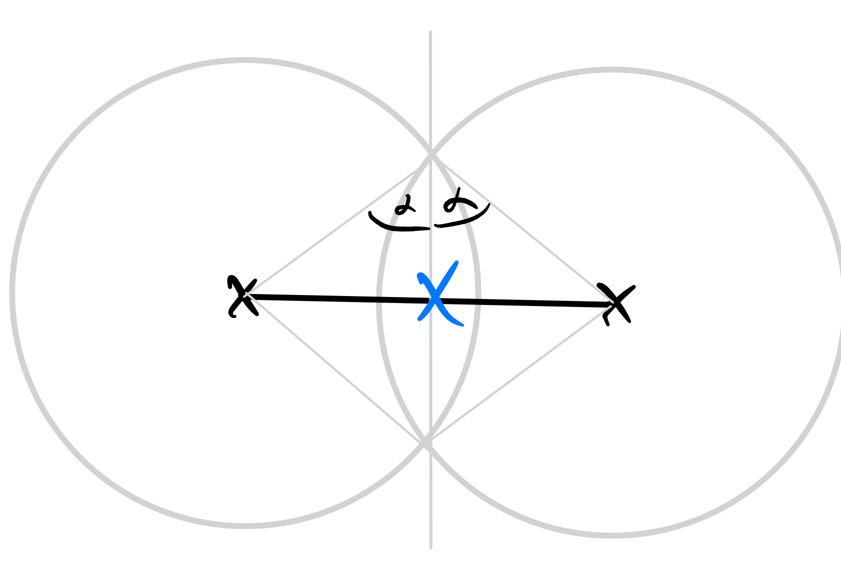
(b)



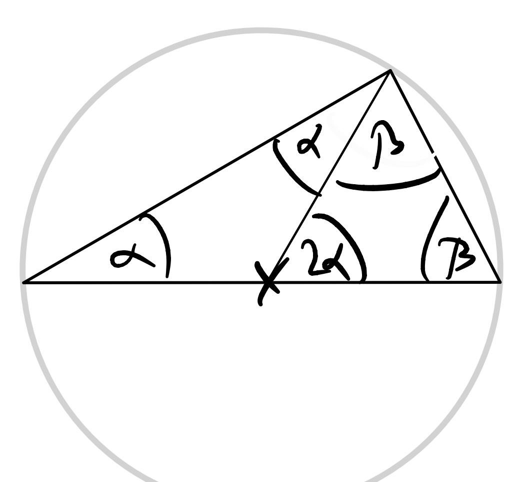
$\Rightarrow \dfrac{h}{a} = \dfrac{b}{h}$

$\Leftrightarrow h = \sqrt{a\cdot b}$

Um (a) und (b) zu konstruieren, braucht man nur die Konstruktion des Mittelpunktes und den Satz von Thales:

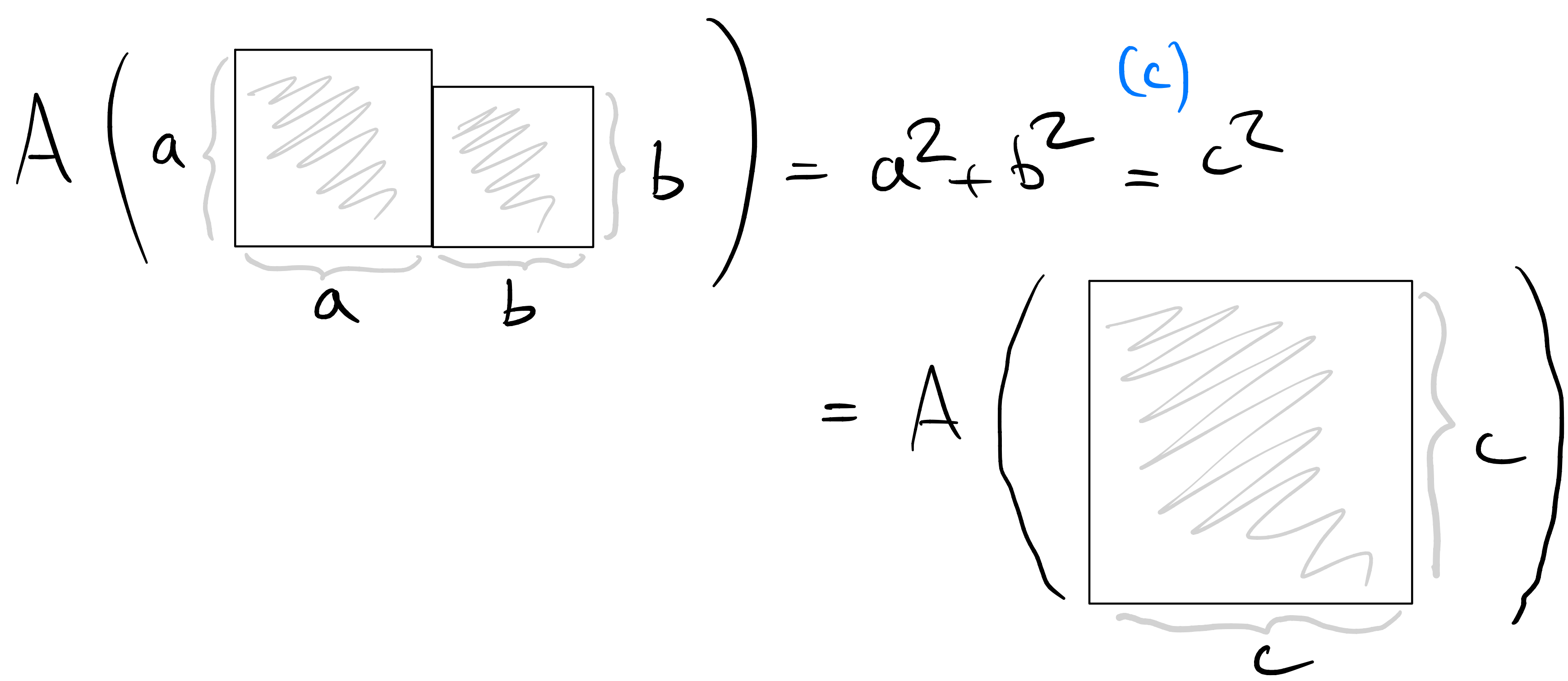
(K): 

SSS + SWS



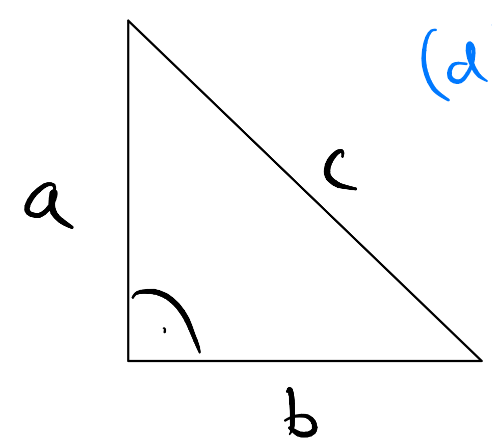
Innenwinkelsumme in Δ = 180 $\Rightarrow \alpha + \beta = 90$

Konstruktion 5: Schritt 3 kann man induktiv wie folgt durchführen:

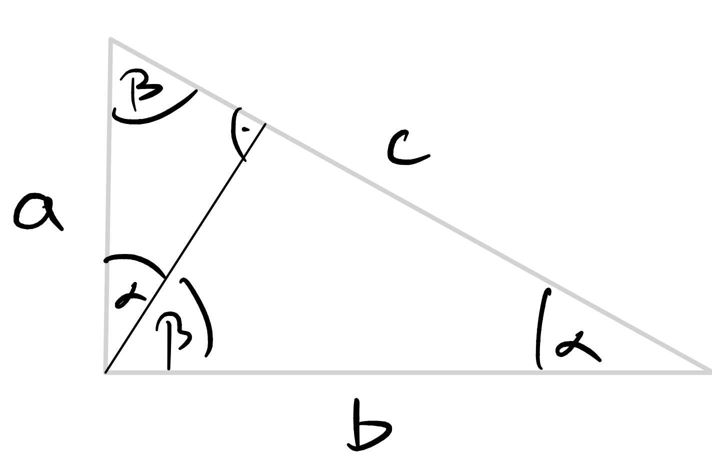


wobei c sich wie folgt konstruieren lässt:

(d)



Konstruktion des rechten Winkels in (d) ist wie in (K) und (c) gilt nach dem **Satz von Pythagoras**:

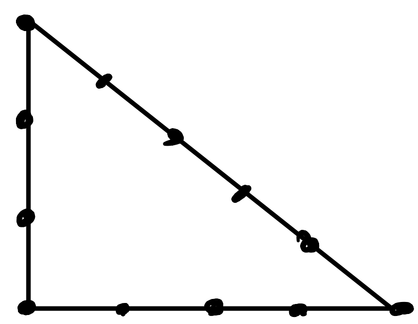


$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c_1}, \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{c_2}$$

$$\Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

□

Bemerkung 6: Den rechten Winkel kann man auch wie folgt konstruieren:



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$