Verknotete Kurven und der Satz von Fáry-Milnor

Def 1: Eine Isotopie von $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\Phi : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ sodass für } \Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \Phi(t,x) \text{ gilt:}$$

1. Φ_t Homöomorphismus
 ($:\Leftrightarrow$ stetig mit stetigem Invers)
2. $\Phi_0 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$

Def 2: Zwei Kurven $c_0, c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißen ambient isotop wenn es eine Isotopie $\Phi : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $\Phi_1(\operatorname{im} c_0) = \operatorname{im} c_1$

Lemma 3: Ambiente Isotopie definiert eine Äquivalenzrelation auf einfach geschlossenen Kurven.

Beweis: Verknüpfung von Isotopien $\Phi_t = \Phi_t^{(2)} \circ \Phi_t^{(1)}$. $\square$

Def 4: Eine Äquivalenzklasse wie oben heißt einen Knoten.

Knotentheorie = Studium von Knoten

Def 5: Eine (stetige) Kurve in $\mathbb{R}^n$ heißt unverknotet, wenn sie ambient isotop zu dem Einheitskreis c_0 ist:

$$c_0(t) = \cos(t) e_1 + \sin(t) e_2,$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ und $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.

Sonst heißt die Kurve verknotet.

Der dem Einheitskreis entsprechende Knoten heißt der Unknotten oder der triviale Knoten.

Lemma 6: Für $n \neq 3$ ist jede reguläre einfach geschlossene Kurve $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ambient isotop zu dem Einheitskreis.

Beweisskizze: [Buch von Hirsch, Kap. 8, Satz 1.4]

- Fakt aus Differentialtopologie (Isotopie Erweiterung):
  Reguläre Homotopie $\varphi: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, sodass $\varphi_s: [0,1) \to \mathbb{R}^n$ für jedes s einfach geschlossen ist, (Isotopie von Einbettungen) lässt sich in eine ambiente Isotopie $\Phi: [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erweitern.

Beweis des Faktes: Tangentialvektoren $\frac{d}{ds}\varphi(s,t)$ definieren einen Vektorfeld $\{(s,\varphi(s,t)) \mid (s,t) \in [0,1]^2\} \to \mathbb{R}^4$, der sich zu einem Vektorfeld $X : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit kompakten Träger erweitern lässt. Dann ist die Lösung $\phi : [0,1) \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ der Differentialgleichung $\frac{d}{ds}\phi(s,x) = X(s,\phi(s,x))$ mit der Anfangsbedingung $\phi(0,x) = x$ die gesuchte ambiente Isotopie.

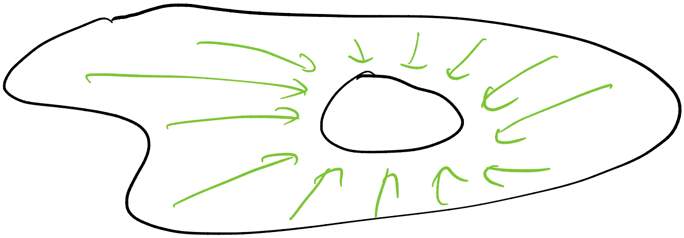
(ϕ existiert lokal nach dem Existenzsatz für DG des erstes Grades und global nach dem Escape Lemma.) $\square$

$\Rightarrow$ es reicht eine reguläre Homotopie φ von c_0 und c durch einfach geschlossene Kurven ($=:$ Isotopie) zu finden

$n=2$: Umlaufsatz von Hopf $\Rightarrow r(c) \in \{\pm 1\}$

Satz von Whitney $\Rightarrow \exists$ reguläre Homotopie φ von c und c_0 oder $\overline{c_0}$ durch geschlossene Kurven

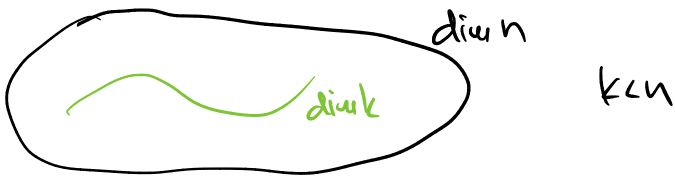
c und c_0 einfach geschlossen $\Rightarrow$ kann φ so konstruieren, sodass φ_s keine Selbstschleife hat



$n \geq 4$: Der Bild der C^1-Abbildung $F: \mathbb{R} \times [0,1]^2 \to \mathbb{R}^n$

$$F(s,t_1,t_2) = \begin{cases} s\,c(t_1) + (1-s)\,c(t_2) & t_1 \neq t_2 \\ c'(t) & t = t_1 = t_2 \end{cases}$$

hat nach dem Satz von Sard Maß 0 in $\mathbb{R}^n$ für $n > 3$.



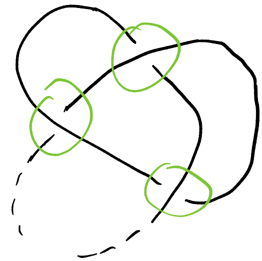
$\Rightarrow \exists\, e_n \in \mathbb{R}^n$, $\|e_n\| = 1$, sodass $e_n \notin \text{Bild}(F)$

$\Rightarrow \varphi(s,t) := c(t) - s\langle c(t), e_n\rangle e_n$ ist eine Isotopie,

sodass $\varphi_0 = c$ und $\operatorname{im} \varphi_1 \subset \operatorname{Lin}(e_n)^{\perp} \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

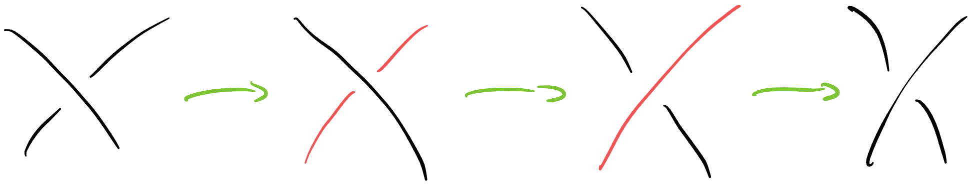
Induktion $\Rightarrow$ c ist isotop zu einer einfach geschlossenen regulären Kurve $\tilde{c}$ in $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^n$

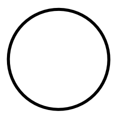
Betrachte eine reguläre Projektion von $\tilde{c}$:



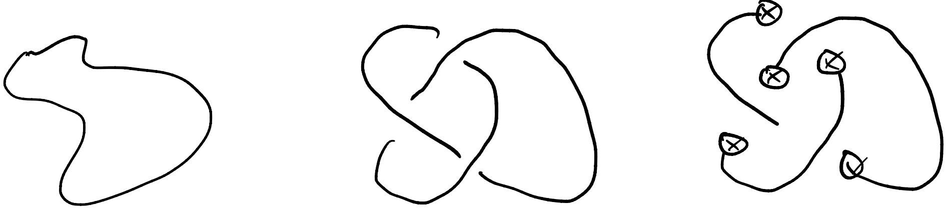
Alle Übergänge lassen sich in der vierten Dimension entknotten :

↪ durch andere Farbe repräsentiert



$\Rightarrow$ c ist isotop zu  $\square$

Bemerkung 7: • In der Knotentheorie von Kurven, die ambient isotop zu einer regulären Kurve sind (z.B. alle C^1-Kurven), gibt es also in Dimensionen $n \neq 3$ nur den Unknoten, und die Theorie ist trivial.

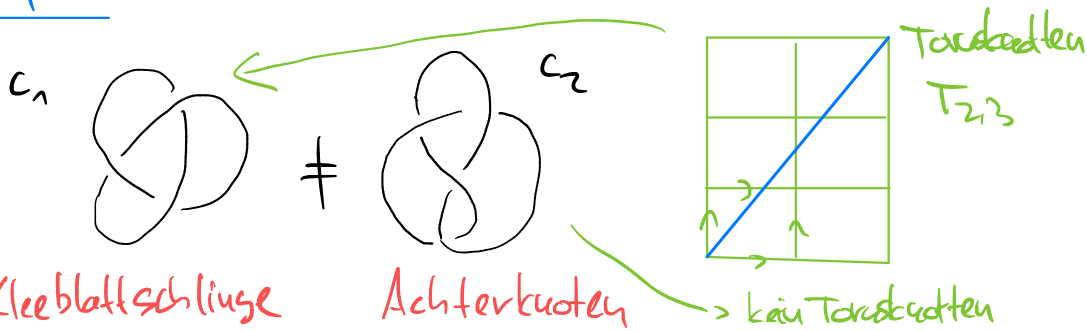


$n=2$: zu rigid $\qquad$ $n=3$ $\qquad$ $n \geq 4$: zu flexibel

Wie der nächste Beispiel zeigt, gibt es in $n=3$ mehrere nicht triviale Knoten. Die Hauptaufgabe der Knotentheorie ist diskrete Invariante zu entwickeln, die die Knoten in $n=3$ klassifizieren.

- Für alle $n \geq 3$ gibt es nicht triviale stetige Knoten – Wildknoten. Das sind aber pathologische Beispiele wie z.B. die Menge von Cantor.

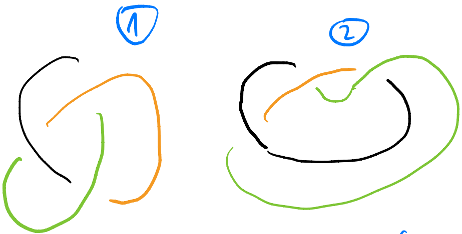
Beispiel 8: Die einfachste nicht triviale nicht äquivalente Knoten:

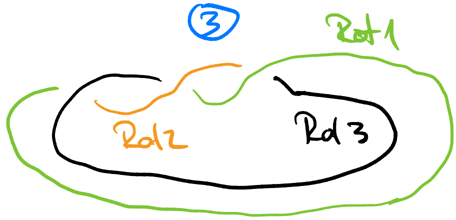


Dass es nun keine Unknoten gibt, kann man mit Hilfe von der knotentheoretischen Brückenzahl $b(c) = \min \beta(c')$, wobei das Minimum über alle ambient isotopische Kurven ist.

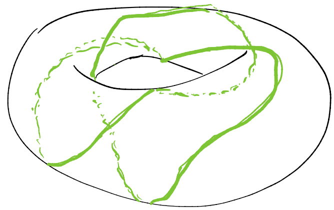
Es gilt $b(c_1) = b(c_2) = 2$, aber $b(c_0) = 1$. Um c_1 von c_2 zu unterscheiden, braucht man andere Invariante wie das Polynom von Jones.

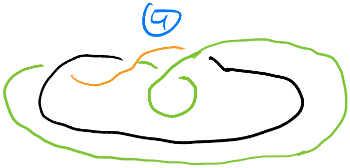
Isotopien der Kleeblattschlinge:

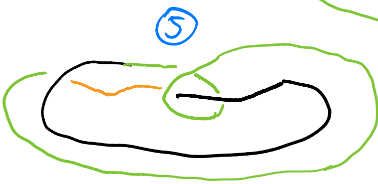


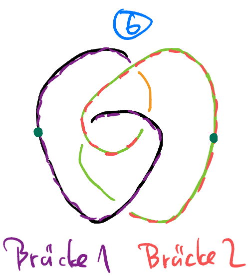


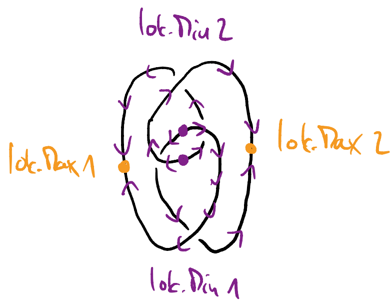
3x vertikal herum
2x horizontal herum





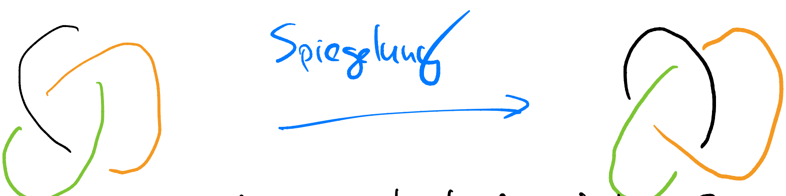






e = Vektor senkrecht zu der Ebene

Nicht äquivalente Varianten der Kleeblattschlinge



um diese zu unterscheiden reicht das Polynom von Jones nicht!

Thm 9 (Fáry-Milnor)

$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ verknotete einfach geschlossene Kurve

$\Rightarrow \varkappa(c) \geq 4\pi$

Beweis: Widerspruchsannahme: $\varkappa(c) < 4\pi$

$$\to 2 > \frac{\varkappa(c)}{2\pi} \geq \mu(c) = \min_{e \in S^2} \mu(c,e) \geq 1,$$

wobei $\mu(c,e) := \#\{\text{lok. Max. von } t \mapsto \langle c(t), e \rangle\}$

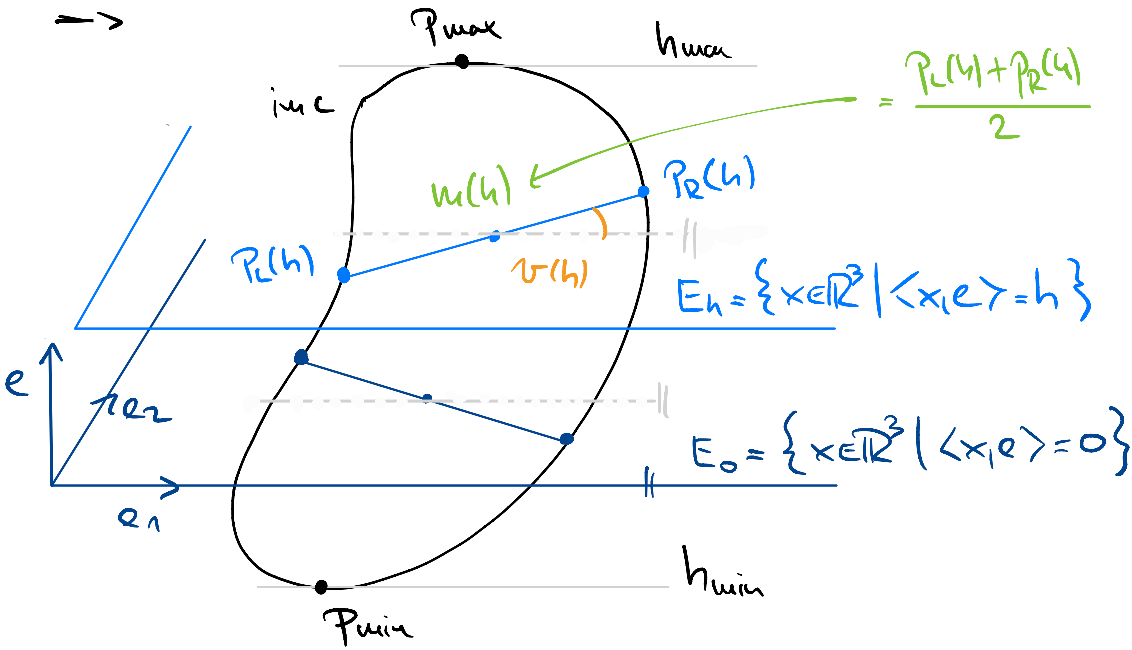
- die zweite Ungleichung folgt aus
$$\frac{1}{A[S^2]} \int_{S^2} \mu(c,e)\, dA(e) = \frac{\varkappa(c)}{2\pi},$$
was wir letzte Woche mit Hilfe der Krümmungsapproximation durch Polygone bewiesen haben.
- die letzte Ungleichung gilt weil jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall mindestens ein lok. Max. besitzt.
- $\mu(c)$ ganzzählig

$\to \mu(c) = 1$

$\Rightarrow \exists e \in S^2 : \mu(c,e) = 1$

Die Funktion $h : t \mapsto \langle c(t), e \rangle$ muss also genau ein (lokales) Maximum t_{max} und genau ein (lokales) Minimum t_{min} haben. Seien h_{max} und h_{min} die entsprechende Werte.

$\rightarrow$



weil $$E_h \cap \operatorname{im} c = \begin{cases} \{p_L(h), p_R(h)\} & h_{min} < h < h_{max}, \\ \{p_{min}\} & h = h_{min}, \\ \{p_{max}\} & h = h_{max}, \\ \emptyset & \text{sonst}. \end{cases}$$

Sonst im Widerspruch mit der Position von lokalen Extremen von h.

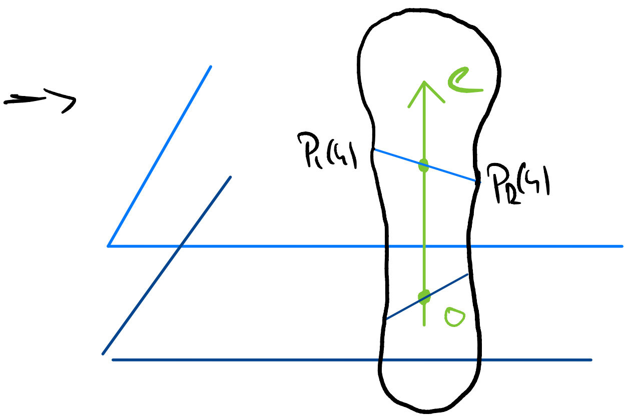
Sei $\pi: \mathbb{R}^3 \to E_0$ die Orthogonalprojektion.

Konstruiere Isotopie $\Phi: [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in 2 Schritten:

① $\Phi^{(1)}: [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zentriert $m(h)$ auf die e-Achse durch Translationen in den E_h Ebenen:

$$\Phi^{(1)}(t,x) := \begin{cases} x - t\pi(m(h)) & h_{min} < h < h_{max}, \\ x - t\pi(p_{min}) & h \le h_{min}, \\ x - t\pi(p_{max}) & h \ge h_{max}. \end{cases}$$

$h = \langle x, e \rangle$



- $\Phi^{(1)}$ ist offensichtlich eine Isotopie, weil sie in jeder E_h Ebene nur eine Translation um einen konstanten Vektor implementiert, der stetig von h abhängt.
- Winkel $\vartheta(h)$ und die Längen von $\pi(p_L(h))$ und $\pi(p_R(h))$ ändern sich während der Isotopie.

2 $\Phi^{(2)}: [0,1) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rotiert um den Winkel $-\nu(h)$ in den E_h Ebenen:

$h = \langle x, e \rangle$

$$\Phi^{(2)}(t,x) := he + \begin{pmatrix} \cos(t\nu(h)) & \sin(t\nu(h)) \\ -\sin(t\nu(h)) & \cos(t\nu(h)) \end{pmatrix} \pi(x)$$

wobei $\nu: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, sodass

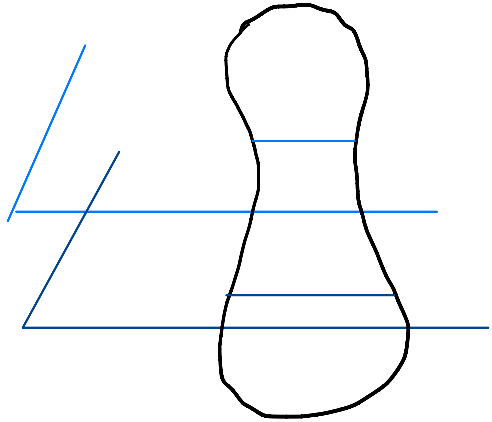
$$\xi(h) = \cos(\nu(h)) e_1 + \sin(\nu(h)) e_2$$

für $\xi: \mathbb{R} \to S^1$:

$$\xi(h) := \begin{cases} \pi\left(\dfrac{p_R(h) - p_L(h)}{\| \quad - \| - \quad \|}\right) & h_{min} < h < h_{max} \\ \pi(\dot{c}(t_{max})) & h \leq h_{min} \\ \pi(\dot{c}(t_{min})) & h \geq h_{max} \end{cases}$$

- Solche Funktion ν existiert nach dem Liftungslemma.
- $\Phi^{(2)}$ ist offensichtlich eine Isotopie, weil sie in jeder E_h Ebene nur eine Rotation implementiert, und der Rotationswinkel stetig von h abhängt.

$\Rightarrow$



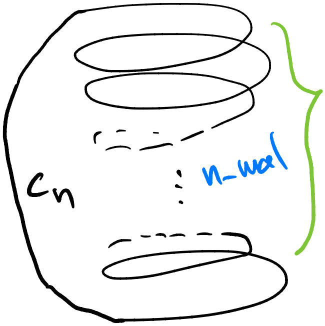
einfach geschlossene Kurve in der Ebene gespannt von e_0, e_1

$\Rightarrow$ unverknotet

Setze $\Phi(t,x) := \Phi^{(2)}(t, \Phi^{(1)}(t,x))$, sodass $\Phi_t = \Phi_t^{(2)} \circ \Phi_t^{(1)}$. Dann ist Φ eine Isotopie, die c unverknottet. $\square$

$\Rightarrow$ Man kann also durch die Wahl eines regulären Repräsentantes und die Berechnung seines Totalkrümmungs zeigen, dass einer Knoten unverknottet ist. Nächster Beispiel zeigt, dass man indem aber nicht zeigen kann, dass der Knoten verknottet ist.

Beispiel 10:



konstante Krümmung (und Torsion) in dem Helix-Teil.

$\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa(c_n) = \infty$, aber c_n unverknottet für alle n !